Die Trinionen:
Die natürliche Erweiterung der komplexen und dualen Zahlen

$$\mathbb{Y}_{(k)}$$

Jörg Mösch

Juni 2026

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License.
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Die Trinionen:
Die natürliche Erweiterung der komplexen und dualen Zahlen

Jörg Mösch
mailtojoerg@proton.me

13. Juni 2026

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die natürliche dreidimensionale Erweiterung der komplexen und dualen Zahlen eingeführt: die Trinionen-Algebren $\mathbb{Y}(k)$ der Form $a+bi+cj$ mit $i^2=-1$, $j^2=0$ und der kommutativen Kopplung $ij=ji=k$, wobei $k=\alpha+\beta i+\gamma j$ ein Element der Algebra ist. Die Familie $\mathbb{Y}(k)$ wird systematisch untersucht: Multiplikation, Division und Inverse werden hergeleitet. Besondere Aufmerksamkeit gilt den durch die Nicht-Assoziativität hervorgerufenen Phänomenen, die zu invertierbaren Nullteilern, nicht eindeutiger Division und reichen geometrischen Strukturen führen. Die acht fundamentalen Algebren mit $\alpha,\beta,\gamma\in\{0,1\}$ werden untersucht und ihre Nullteiler-Mengen visualisiert. Numerische Beispiele für die Algebra $\mathbb{Y}(1)$ veranschaulichen die beobachteten Phänomene.

Schlüsselwörter: Dreidimensionale Algebra, Kommutativität, Nicht-Assoziativität, Nilpotenz, Nullteiler, Invertierbare Nullteiler, Nullteiler-Geometrie

MSC2020: 17D99, 14J70

1 Einleitung

Die Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen $a+bi$ mit $i^2=-1$ wurde historisch durch die Suche nach Lösungen algebraischer Gleichungen wie $x^2=-1$ motiviert. Sie erwiesen sich nicht nur als elegant, sondern auch als grundlegend für die Beschreibung von Drehungen, Schwingungen und Wellenphänomenen. Die komplexen Zahlen bilden einen zweidimensionalen Körper, in dem jedes Element ein Inverses besitzt [7].

Einen anderen Weg beschreiten die dualen Zahlen $a+b\varepsilon$ mit $\varepsilon^2=0$. Sie modellieren infinitesimale Translationen als Teil eines dynamischen Prozesses und finden Anwendung in der Robotik, der Kinematik und der automatischen Differentiation [9]. Die dualen Zahlen bilden einen zweidimensionalen Ring, in dem ihr nilpotentes Element ε kein statisches Objekt ist, sondern einen infinitesimalen, irreversiblen Vorgang darstellt [2].

Die Frage, ob es eine dreidimensionale Algebra gibt, die die komplexen Zahlen sinnvoll erweitert, beschäftigte bereits William Rowan Hamilton und führte zur Entdeckung der vierdimensionalen Quaternionen [13]. John Milnor [11] und Michel Kervaire [10] bewiesen 1958, dass für endlichdimensionale reelle Divisionsalgebren die einzig möglichen Dimensionen 1, 2, 4 und 8 sind. Eine dreidimensionale Divisionsalgebra kann es also nicht geben. Jede solche Struktur muss notwendigerweise Nullteiler besitzen – das heißt, es existieren Elemente $x\neq 0$ und $y\neq 0$ mit $xy=0$.

Doch ist die Existenz von Nullteilern ein Makel? Aus Sicht des Autors nicht: Auch das reale dreidimensionale Universum weist Strukturen auf, die an Nullteiler erinnern – etwa die Annihilation von Teilchen oder die Singularitäten schwarzer Löcher. Es erscheint daher lohnend, Algebren mit Nullteilern nicht zu meiden, sondern ihre vielfältigen Strukturen systematisch zu untersuchen.

Die vorliegende Arbeit führt eine natürliche dreidimensionale Erweiterung der komplexen und dualen Zahlen ein: die **Trinionen** der Form

$$x = a + bi + cj,$$

mit den Basis-Elementen 1, i und j und den Multiplikationsregeln $i^2 = -1, j^2 = 0, ij = ji = k$, wobei der Kopplungsparameter $k = \alpha + \beta i + \gamma j$ ein festes Element der Algebra ist. Die resultierende Familie $\mathbb{Y}(k)$ hängt von drei reellen Parametern α, β, γ ab und enthält die komplexen Zahlen sowie die dualen Zahlen als natürliche Unteralgebren. Die Bezeichnung „Trinionen“ lehnt sich an die Quaternionen und Oktonionen [1] an; das Symbol $\mathbb{Y}$ betont den dreidimensionalen Charakter der Algebra.

Ein wesentliches Merkmal der Algebren $\mathbb{Y}(k)$ ist ihre Nicht-Assoziativität. Dies mag erklären, warum dreidimensionale Algebren dieser Art in der Literatur bisher kaum untersucht wurden. Die fehlende Assoziativität macht viele Techniken der klassischen Algebra unanwendbar, öffnet aber zugleich das Tor zu neuen, unerwarteten Strukturen.

Ziel dieser Arbeit ist eine einführende Untersuchung der Familie der Algebren $\mathbb{Y}(k)$. Nach der Definition und der Diskussion grundlegender Eigenschaften werden allgemeine Rechenregeln für Multiplikation, Division und Inverse hergeleitet. Ein besonderer Fokus liegt auf dem Verhalten von Nullteilern, die in diesen Algebren eine reiche geometrische Struktur aufweisen. Anschließend werden die acht fundamentalen Algebren mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$ vorgestellt und ihre Nullteiler-Mengen visualisiert. Den Abschluss bilden numerische Beispiele für die Algebra $\mathbb{Y}(1)$, die die zuvor beschriebenen Phänomene veranschaulichen.

2 Definition der Algebren $\mathbb{Y}(k)$

In dieser Arbeit wird unter einer reellen Algebra ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit bilinearer Multiplikation und Einselement verstanden [5].

Sei $\mathbb{Y}(k)$ der dreidimensionale reelle Vektorraum mit der Basis $\{1, i, j\}$, d.h. jedes Element hat die Form

$$x = a + bi + cj, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Die Algebren $\mathbb{Y}(k)$ werden durch die Basis $\{1, i, j\}$ sowie die Multiplikationsregeln

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = 0, \qquad ij = ji = k, \qquad k = \alpha + \beta i + \gamma j, \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \tag{1}$$

definiert. Die Parameter α, β, γ bestimmen die Kopplung k zwischen der imaginären Einheit i und der dualen (nilpotenten) Einheit j. Die Multiplikation wird bilinear auf den gesamten Vektorraum fortgesetzt. Das Element 1 wirkt dabei als **Einselement**, d.h. für alle $x \in \mathbb{Y}(k)$ gilt $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

Die folgende Tabelle veranschaulicht die Multiplikation der Basiselemente:

$\cdot$	1	i	j
1	1	i	j
i	i	-1	k
j	j	k	0

Aus $ij = ji$ und der Bilinearität folgt sofort die **Kommutativität** der Multiplikation: Für alle $x, y \in \mathbb{Y}(k)$ gilt $xy = yx$.

Für alle $\mathbb{Y}(k)$ gilt zudem $(ii)j \neq i(ij)$, woraus die **Nicht-Assoziativität** der Algebren folgt.

Beweis. Nach den Multiplikationsregeln ist

$$(ii)j = -j,$$

während

$$\begin{aligned} i(ij) &= i(\alpha + \beta i + \gamma j) \\ &= \alpha i - \beta + \gamma(\alpha + \beta i + \gamma j) \\ &= (\alpha\gamma - \beta) + (\alpha + \beta\gamma)i + \gamma^2 j. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der j-Komponenten zeigt: Wäre $(ii)j = i(ij)$, müsste $\gamma^2 = -1$ gelten. Da $\gamma \in \mathbb{R}$ und $\gamma^2 \geq 0$, ist dies unmöglich. Somit gilt

$$(ii)j \neq i(ij)$$

für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, und die Algebren $\mathbb{Y}(k)$ sind nicht-assoziativ. □

Zusammenfassend handelt es sich bei $\mathbb{Y}(k)$ um **kommutative, nicht-assoziative Algebren mit Einselement**.

3 Natürliche Unteralgebren

Unabhängig von den Parametern α, β, γ enthält $\mathbb{Y}(k)$ stets zwei kanonische zweidimensionale Unteralgebren, die die komplexen und dualen Zahlen als Spezialfälle realisieren:

- **Komplexer Teil:** $\mathcal{C} := \operatorname{span}\{1, i\}$. Da $i^2 = -1 \in \mathcal{C}$, ist $\mathcal{C}$ abgeschlossen unter Multiplikation und isomorph zum Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die Einbettung $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{Y}(k)$ ist für alle k identisch.
- **Dualer Teil:** $\mathcal{D} := \operatorname{span}\{1, j\}$. Wegen $j^2 = 0 \in \mathcal{D}$ ist auch $\mathcal{D}$ eine Unteralgebra, isomorph zum Ring der dualen Zahlen $\mathbb{D} = \mathbb{R}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$.

Bemerkung 3.1. Als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist $\mathbb{Y}(k) = \mathcal{C} + \mathcal{D}$ mit $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \mathbb{R} \cdot 1$. Der Kopplungsvektor k bestimmt ausschließlich die Wechselwirkung zwischen den nicht-skalaren Anteilen (d. h. das Produkt $ij = ji = k$), während die Multiplikationsregeln innerhalb von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ unverändert bleiben. Damit lässt sich $\mathbb{Y}(k)$ als minimale Erweiterung auffassen, die $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zu einer gemeinsamen dreidimensionalen Algebra vereinigt. Dies unterstreicht die Interpretation als natürliche dreidimensionale Erweiterung von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{D}$.

4 Allgemeine Rechenregeln

4.1 Addition

Für $x = a + bi + cj$ und $y = d + ei + fj$ wird die Summe $x + y$ als komponentenweise Addition der Koeffizienten festgelegt:

$$x + y = (a + bi + cj) + (d + ei + fj) = (a + d) + (b + e)i + (c + f)j. \tag{2}$$

4.2 Multiplikation

Für $x = a + bi + cj$ und $y = d + ei + fj$ wird das Produkt xy durch die definierenden Multiplikationsregeln aus (1) festgelegt. Ausmultiplizieren und Zusammenfassen der Terme ergibt die allgemeine Multiplikationsformel:

$$xy = ad - be + \alpha(bf + ce) \;+\; \big(ae + bd + \beta(bf + ce)\big)i \;+\; \big(af + cd + \gamma(bf + ce)\big)j. \tag{3}$$

4.3 Division (Quotient)

In assoziativen Algebren wird die Division üblicherweise über den Kehrwert definiert ($z/x := z \cdot x^{-1}$). Aufgrund der Nicht-Assoziativität von $\mathbb{Y}(k)$ ist dieser Ansatz nicht geeignet, da die Gleichung $xy = z$ im Allgemeinen nicht durch Multiplikation mit einem Inversen nach y aufgelöst werden kann, selbst wenn ein Element x^{-1} mit $x \cdot x^{-1} = 1$ existiert.

Für zwei Elemente $x = a + bi + cj$ und $z = p + qi + rj$ wird der Quotient $y = d + ei + fj = z/x$ daher als die eindeutige Lösung der linearen Gleichung $xy = z$ definiert. Wegen der Kommutativität der Algebra ist dabei keine Unterscheidung zwischen Links- und Rechtsdivision erforderlich. Mit der Multiplikationsformel (3) ergibt sich so das lineare System

$$\begin{aligned} ad + (-b + \alpha c)e + \alpha b f &= p, \\ bd + (a + \beta c)e + \beta b f &= q, \\ cd + \gamma c e + (a + \gamma b)f &= r. \end{aligned}$$

Dies entspricht in Matrixform dem linearen System $M_x\,(d, e, f)^T = (p, q, r)^T$ mit der Koeffizientenmatrix

$$M_x = \begin{pmatrix} a & -b + \alpha c & \alpha b \\ b & a + \beta c & \beta b \\ c & \gamma c & a + \gamma b \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Nach der Cramer-Regel [3] ist der gemeinsame Nenner der Quotientenkomponenten die Determinante $\det M_x$ [8]. Diese berechnet sich durch Entwicklung nach der ersten Zeile zu:

$$\det M_x = a^2(a + \gamma b + \beta c) + b^2(a + \gamma b - \beta c) - 2\alpha abc. \tag{5}$$

4.3.1 Eindeutiger Quotient ($\det M_x \neq 0$)

Ist $\det M_x \neq 0$, so besitzt das System eine eindeutige Lösung. Mit Hilfe der Adjunkten $\mathrm{adj}(M_x)$ [4] kann diese kompakt dargestellt werden. Die dafür benötigten neun Kofaktoren C_{mn} von M_x [6] sind unter Berücksichtigung der Vorzeichen $(-1)^{m+n}$

$$\begin{aligned} &C_{11} = a(a + \gamma b + \beta c), && C_{12} = -b(a + \gamma b - \beta c), && C_{13} = -c(a - \gamma b + \beta c), \\ &C_{21} = ab + \gamma b^2 - \alpha ac, && C_{22} = a^2 + a\gamma b - \alpha bc, && C_{23} = -c(a\gamma + b - \alpha c), \\ &C_{31} = -b(\alpha a + \beta b), && C_{32} = b(\alpha b - \beta a), && C_{33} = a^2 + b^2 + c(\beta a - \alpha b). \end{aligned}$$

Die Adjunkte (Transponierte der Kofaktormatrix) ist die Matrix:

$$\mathrm{adj}(M_x) = (C_{nm}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Für einen beliebigen Dividenden $z = p + q\,i + r\,j$ ergeben sich die Zähler des Quotienten $y = z/x$ daher durch die Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathrm{adj}(M_x)\,(p, q, r)^T$:

$$\begin{aligned} N_d &= p\,a(a + \gamma b + \beta c) + q\,(ab + \gamma b^2 - \alpha ac) - r\,b(\alpha a + \beta b), \\ N_e &= -p\,b(a + \gamma b - \beta c) + q\,(a^2 + a\gamma b - \alpha bc) + r\,b(\alpha b - \beta a), \\ N_f &= -p\,c(a - \gamma b + \beta c) - q\,c(a\gamma + b - \alpha c) + r\,\big(a^2 + b^2 + c(\beta a - \alpha b)\big). \end{aligned} \tag{6}$$

Damit ergibt sich für $\det M_x \neq 0$ aus (5) und (6) die explizite Divisionsformel:

$$y = z/x = \frac{N_d}{\det M_x} + \frac{N_e}{\det M_x}\,i + \frac{N_f}{\det M_x}\,j. \tag{7}$$

4.3.2 Eindeutiges Inverses ($\det M_x \neq 0$)

Setzt man im Dividenden $z = p + q\,i + r\,j$ die Werte $p = 1,\ q = 0,\ r = 0$ (d.h. $z = 1$) ein, so erhält man für $\det M_x \neq 0$ aus (5), (6) und (7) das multiplikative Inverse:

$$x^{-1} = \frac{a(a+\gamma b+\beta c)}{\det M_x} \;-\; \frac{b(a+\gamma b-\beta c)}{\det M_x}\,i \;-\; \frac{c(a-\gamma b+\beta c)}{\det M_x}\,j. \tag{8}$$

Bemerkung 4.1 (Nicht-Assoziativität und Division durch Nullteiler)**.** Aufgrund der fehlenden Assoziativität ist im Allgemeinen $x^{-1}(xy) \neq (x^{-1}x)y = y$, so dass das Inverse nicht zur Kürzung in mehrfachen Produkten verwendet werden kann. Die eindeutige Bestimmung des Quotienten $y = z/x$ wird nicht durch die Existenz von x^{-1} gesichert, sondern ausschließlich durch die Regularitätsbedingung $\det M_x \neq 0$; das Inverse ist lediglich der Spezialfall $z = 1$ des eindeutigen Quotienten für Elemente x mit $\det M_x \neq 0$. Im Allgemeinen gilt $z/x \neq z \cdot x^{-1}$; Gleichheit tritt nur dann ein, wenn z reell ist (d.h. $z = a + 0i + 0j$).

Für den Fall $\det M_x = 0$ kann eine Division und die Existenz von Inversen dennoch möglich sein; dies wird im folgenden Abschnitt über Nullteiler-Phänomene behandelt (siehe 5.1 und 5.2).

5 Nullteiler-Phänomene

Ein Element $x \neq 0$ heißt *Nullteiler*, wenn ein $y \neq 0$ existiert mit $xy = 0$. In den Algebren $\mathbb{Y}(k)$ ist dies äquivalent zu $\det M_x = 0$.

Die Menge der Nullteiler ist daher

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{D}} := \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid \det M_x = 0\}.$$

Im Folgenden werden einige besondere algebraische Phänomene gezeigt, die sich direkt aus der Struktur der Algebren $\mathbb{Y}(k)$ ergeben: Division durch Nullteiler, invertierbare Nullteiler, die involutorische Geometrie der Partnergeraden sowie das Verhalten von Produkten mit Nullteilern.

5.1 Division durch Nullteiler ($\det M_x = 0$)

Ist $\det M_x = 0$, so ist die Multiplikationsmatrix M_x singulär und x ein Nullteiler. Die mit Hilfe der Cramer-Regel gewonnene Divisionsformel (7) versagt in diesem Fall. Die Division $y = z/x$ ist dennoch definiert, wenn das lineare System $M_x\,(d,e,f)^T = (p,q,r)^T$ lösbar ist.

Nach dem Satz von Rouché-Capelli [12, p. 56] ist dies genau dann der Fall, wenn der Rang der erweiterten Matrix $(M_x \mid (p,q,r)^T)$ mit dem Rang von M_x übereinstimmt:

$$\operatorname{rang}(M_x) = \operatorname{rang}\big(M_x \mid (p,q,r)^T\big).$$

Äquivalent dazu muss der Dividend $z = (p,q,r)^T$ im Bild (Spaltenraum) von M_x liegen. Ist dies nicht gegeben, existiert kein Quotient.

Für alle Nullteiler mit $\operatorname{rang}(M_x) = 2$ (der generische Fall) ist das lineare System $M_x\,(d,e,f)^T = (p,q,r)^T$ somit lösbar, wenn der Dividend z orthogonal zum linken Kern von M_x steht. Da die Zeilen der Adjunkten $\operatorname{adj}(M_x)$ diesen Kern aufspannen, reduziert sich die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit auf das Verschwinden der bereits berechneten Zähler (6):

$$N_d = N_e = N_f = 0. \tag{9}$$

Da die Adjunkte $\operatorname{adj}(M_x)$ im Fall $\det M_x = 0$ und $\operatorname{rang}(M_x) = 2$ den Rang 1 besitzt, sind ihre Zeilen linear abhängig. Es genügt daher in der Regel, nur einen der drei Zähler zu prüfen. Ist z.B. $N_d = 0$ erfüllt, verschwinden automatisch auch N_e und N_f. Falls jedoch die geprüfte Zeile der Adjunkten verschwindet (z.B. $C_{11} = C_{21} = C_{31} = 0$), muss stattdessen eine der anderen Zeilen geprüft werden.

Ist die Bedingung (9) erfüllt, existiert als eindimensionale Lösungsmenge eine affine Gerade

$$y = y_p + \lambda\, y_0, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

wobei y_p eine beliebige partikuläre Lösung des Systems $M_x\, y = z$ und y_0 ein Basisvektor des Kerns $\ker M_x$ (d.h. $M_x y_0 = 0$) ist. Der Basisvektor y_0 spannt die durch den Ursprung verlaufende Nullteiler-Partnergerade von x auf; die Lösungsgerade ist parallel zu dieser, aber um y_p verschoben und geht daher nicht durch den Ursprung.

Eine partikuläre Lösung y_p lässt sich für jeden Nullteiler x mit $\operatorname{rang}(M_x) = 2$ konstruktiv bestimmen, indem man zwei linear unabhängige Zeilen von M_x auswählt, eine Koordinate frei setzt und das resultierende 2×2-System löst.

Bemerkung 5.1 (Sonderfall $\alpha = \beta = 0,\ a = b = 0$)**.** Der Rang fällt ausschließlich für Elemente auf der j-Achse ($a = b = 0,\ c \neq 0$) in Algebren mit $\alpha = \beta = 0$ auf 1 ab. Hier ist $\operatorname{adj}(M_x) = 0$ und die Bedingung (9) wird trivial. Eine direkte Analyse zeigt, dass die Division dann nur lösbar ist, wenn auch der Dividend auf der j-Achse liegt ($p = q = 0$). In diesem Fall ist die Lösungsmenge eine Ebene. Für alle anderen Parameter α und β sowie für Nullteiler außerhalb der j-Achse bleibt es stets beim generischen Fall $\operatorname{rang}(M_x) = 2$.

5.2 Invertierbare Nullteiler

Aufgrund der Nicht-Assoziativität der Algebren $\mathbb{Y}(k)$ können Elemente $x = a + bi + cj$ mit $\det M_x = 0$ dennoch Inverse besitzen (vgl. Abschnitt 5.1). Solche Elemente heißen *invertierbare Nullteiler* $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}\text{inv}}$.

Die Existenz eines Inversen ist äquivalent zur Lösbarkeit des Systems $M_x(d, e, f)^T = (1, 0, 0)^T$. Ist $\det M_x = 0$ und $\operatorname{rang}(M_x) = 2$, so ist dies nach dem Satz von Rouché-Capelli genau dann der Fall, wenn die drei Zähler

$$C_{11} = a(a + \gamma b + \beta c), \quad C_{12} = -b(a + \gamma b - \beta c), \quad C_{13} = -c(a - \gamma b + \beta c)$$

aus (8) verschwinden. Die allgemeine Lösung ist dann, wie bei der Division durch Nullteiler, eine affine Gerade.

Proposition 5.2 (Geometrische Charakterisierung)**.** *Die Menge der invertierbaren Nullteiler* $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}\text{inv}}$ *von* $\mathbb{Y}(k)$ *ist exakt die Schnittmenge der Nullstellenfläche der Determinante* $\det M_x$ *mit der Vereinigung der drei Koordinatenebenen, abzüglich des Nullpunkts:*

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{D}\text{inv}} = \big\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid \det M_x = 0\big\} \ \cap\ \big(\{a = 0\} \cup \{b = 0\} \cup \{c = 0\}\big).$$

Auf jeder Koordinatenebene reduziert sich die Konsistenzbedingung $C_{11} = C_{12} = C_{13} = 0$ *auf eine lineare Relation zwischen den verbleibenden Koordinaten, unter der* $\det M_x = 0$ *automatisch erfüllt ist.*

Satz 5.3 (Explizite Inverse bei $\det M_x = 0$)**.** *Sei* $x = a + bi + cj$ *ein invertierbarer Nullteiler. Dann ist die Lösungsmenge von* $M_x(d, e, f)^T = (1, 0, 0)^T$ *die affine Gerade*

$$x^{-1} = y_p + \lambda\, y_0, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

wobei y_p *eine partikuläre Lösung des Systems* $M_x(d, e, f)^T = (1, 0, 0)^T$ *ist und* y_0 *ein Basisvektor des Kerns* $\ker M_x$ *(d.h.* $M_x y_0 = 0$*). Abhängig von der Lage auf den jeweiligen Koordinatenebenen ergeben sich folgende explizite Formeln:*

1. ***Ebene*** $a = 0$**:** $\quad \gamma b = \beta c,\ (b, c) \neq (0, 0)$

$$x^{-1} = -\frac{1}{b}\, i \ +\ \frac{c}{b^2}\, j \ +\ \lambda\Big(-\beta b \ +\ \alpha b\, i \ +\ (b - \alpha c)\, j\Big)$$

2. ***Ebene*** $b = 0$***:*** $a = -\beta c$, $c \neq 0$, $\beta \neq 0$

$$x^{-1} = -\frac{1}{\beta c}\Big(1 \;+\; \frac{1}{\beta}\, j\Big) \;+\; \lambda\Big(\alpha\beta \;+\; \beta^2\, i \;+\; (\alpha + \beta\gamma)\, j\Big)$$

3. ***Ebene*** $c = 0$***:*** $a = -\gamma b$, $b \neq 0$

$$x^{-1} = -\frac{1}{b(\gamma^2+1)}\Big(\gamma \;+\; i\Big) \;+\; \lambda\Big((\alpha\gamma - \beta) \;+\; (\alpha + \beta\gamma)\, i \;+\; (\gamma^2+1)\, j\Big)$$

4. ***j-Achse*** $(a = b = 0)$***:*** $x = cj$, $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$

$$x^{-1} = -\frac{\gamma}{\alpha c} \;+\; \frac{1}{\alpha c}\, i \;+\; \lambda\, j$$

Der Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ beschreibt die Freiheit im Kern von M_x. Jede Wahl von λ liefert ein gültiges Inverses.

Beweis. Die geometrische Charakterisierung folgt unmittelbar aus den Gleichungen $C_{11} = C_{12} = C_{13} = 0$. Sind $a, b, c \neq 0$, so müssten alle drei Klammern $a + \gamma b + \beta c$, $a + \gamma b - \beta c$, $a - \gamma b + \beta c$ gleichzeitig verschwinden, was nur für $a = b = c = 0$ möglich ist. Also liegt jeder invertierbare Nullteiler auf mindestens einer Koordinatenebene.

Die expliziten Formeln ergeben sich durch Einsetzen der jeweiligen Konsistenzbedingungen in das System $M_x(d, e, f)^T = (1, 0, 0)^T$ und geschicktes Setzen einer Variable auf Null, um eine partikuläre Lösung y_p zu isolieren:

- Für $a = 0$ und $\gamma b = \beta c$ setzt man $d = 0$ und löst das verbleibende 2×2-System nach e, f. Der Kernvektor y_0 wird durch Lösen des homogenen Systems $M_x(d, e, f)^T = (0, 0, 0)^T$ bestimmt.
- Für $b = 0$ und $a = -\beta c$ wird $e = 0$ gesetzt. Die verbleibenden Gleichungen sind entkoppelt und liefern sofort d und f.
- Für $c = 0$ und $a = -\gamma b$ wird $f = 0$ gesetzt. Das resultierende System in d, e ist regulär und lösbar.
- Für $a = b = 0$ und $\beta = 0$ wird $f = 0$ gesetzt. Die verbleibenden Gleichungen liefern d und e.

Einsetzen der angegebenen Vektoren in M_x bestätigt jeweils $M_x y_p = (1, 0, 0)^T$ und $M_x y_0 = (0, 0, 0)^T$. □

5.3 Partnergeraden und Involutorik der Nullteiler

Jeder Nullteiler liegt auf einer Geraden durch den Ursprung (einer Erzeugenden der kubischen Fläche). Die Nullteiler-Partner eines festen Nullteilers x bilden ebenfalls eine Gerade durch den Ursprung – die Partnergerade. Jeder Erzeugenden wird so generisch eine Partnergerade zugeordnet; die Zuordnung ist involutorisch: Liegt y auf der Partnergeraden von x, so liegt x auf der Partnergeraden von y.

Lemma 5.4. *Die Menge der Nullteiler $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$ von $\mathbb{Y}(k)$ ist eine Vereinigung von Geraden durch den Koordinatenursprung.*

Beweis. Die Determinante $\det M_x = a^2(a + \gamma b + \beta c) + b^2(a + \gamma b - \beta c) - 2\alpha abc$ ist ein homogenes Polynom vom Grad 3. Für jeden Skalierungsfaktor $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt daher

$$\det M_{\lambda x} = \lambda^3 \det M_x.$$

Ist $x = (a, b, c)$ ein Nullteiler, also $\det M_x = 0$, so folgt $\det M_{\lambda x} = \det M(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Damit liegt mit jedem Punkt x auch die gesamte Gerade durch den Ursprung und x in der Nullteiler-Menge $\mathcal{Z}_{\mathcal{D}}$. □

Satz 5.5 (Partnergeraden-Involution). *Für jeden Nullteiler $x = a + bi + cj$ von $\mathbb{Y}(k)$ mit* $\operatorname{rang}(M_x) = 2$ *ist die Menge seiner Nullteiler-Partner* $\ker M_x \setminus \{0\}$ *eindimensional. Sie bildet eine eindeutige Erzeugende der Nullteiler-Menge $\mathcal{Z}_\mathcal{D}$, die* Partnergerade $P(x)$.

Die Zuordnung $x \mapsto P(x)$ hängt nur von der Erzeugenden $\ell = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ab und definiert eine Involution auf der Menge der Erzeugenden von $\mathcal{Z}_\mathcal{D}$:

$$P(P(\ell)) = \ell \qquad \textit{für jede Erzeugende } \ell.$$

Eine Erzeugende ist genau dann Fixpunkt dieser Involution ($P(\ell) = \ell$), wenn sie nilpotent ist, d.h. $x^2 = 0$ für $x \in \ell$.

Beweis. (1. Eindimensionalität des Kerns): Da M_x eine 3×3-Matrix ist, gilt nach dem Rangsatz $\dim\ker M_x = 3 - \operatorname{rang}(M_x)$. Mit $\operatorname{rang}(M_x) = 2$ folgt $\dim\ker M_x = 1$; der Kern ist also eindimensional und die Menge der Nullteiler-Partner daher eine Gerade durch den Koordinatenursprung.

(2. Involutorik durch Kommutativität): Sei ℓ eine Erzeugende und $x \in \ell \setminus \{0\}$. Setze $P(\ell) := \ker M_x$ (eine Gerade nach Schritt 1). Wähle $y \in P(\ell) \setminus \{0\}$. Dann gilt $xy = 0$. Wegen der Kommutativität von $\mathbb{Y}(k)$ folgt $yx = 0$, also $x \in \ker M_y$. Da $\ker M_y$ nach Schritt 1 ebenfalls eindimensional ist und $x \neq 0$ enthält, muss $\ker M_y = \ell$ gelten. Somit ist $P(P(\ell)) = \ell$.

(3. Fixpunkte der Involutorik): Ist $x^2 = 0$, so liegt x im Kern von M_x, also $\ell \subseteq \ker M_x$. Weil beide eindimensional sind, folgt $\ker M_x = \ell$, d.h. $P(\ell) = \ell$. Die Umkehrung ergibt sich analog: Aus $P(\ell) = \ell$ folgt $x \in \ker M_x$ für $x \in \ell$, also $x^2 = 0$. □

Die Partnermenge für einen Nullteiler x mit $\operatorname{rang}(M_x) = 2$ ist die Gerade

$$P(x) = \ker M_x \ = \{\lambda y_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\},$$

wobei $y_0 \neq 0$ ein beliebiger Vektor des Kerns (d.h. $M_x y_0 = 0$) ist.

Bemerkung 5.6 (Sonderfall $\alpha = \beta = 0,\ a = b = 0$). Der Rang fällt ausschließlich für Nullteiler auf der j-Achse ($a = b = 0,\ c \neq 0$) in Algebren mit $\alpha = \beta = 0$ auf 1 ab. Für diese Sonderfälle, in denen $\det M_x = 0$ ausschließlich eine Ebene erzeugt, ist die Partner-Menge der j-Achse die gesamte Ebene (vgl. Abschnitte 6.1 und 6.5).

5.4 Generische Invertierbarkeit von Nullteiler-Produkten und -Quotienten

In endlich-dimensionalen **assoziativen** Algebren mit Einselement ist das Produkt eines Nullteilers x mit einem beliebigen Element y stets wieder ein Nullteiler oder gleich 0. Da aufgrund der Assoziativität die Gleichung $M_{xy} = M_x \cdot M_y$ gilt, lässt sich der Determinanten-Multiplikationssatz für quadratische Matrizen [12, p. 68] direkt anwenden:

$$\det M_{xy} = \det(M_x \cdot M_y) = \det M_x \cdot \det M_y.$$

Diese Gleichung koppelt die Regularität von Faktoren und Produkten algebraisch fest aneinander: Sobald ein Faktor die Determinante 0 besitzt, gilt zwingend $\det M_{xy} = 0$, und das Produkt xy ist ebenfalls singulär.

Für die **nicht-assoziativen** Algebren $\mathbb{Y}(k)$ gilt diese Kopplung im Allgemeinen nicht.

Beweis. Seien $x = i$ und $y = i$. Aus der Determinantenformel (5) ergibt sich:

$$\det M_i = \det M_{(0,1,0)} = 0^2(0 + \gamma \cdot 1 + 0) + 1^2(0 + \gamma \cdot 1 - 0) - 0 = \gamma.$$

Das Produkt der Einzeldeterminanten ist somit $\det M_x \cdot \det M_y = \gamma^2$.

Das algebraische Produkt ist $x \cdot y = i \cdot i = -1$. Einsetzen in (5) liefert:

$$\det M_{xy} = \det M_{(-1,0,0)} = (-1)^2(-1 + 0 + 0) + 0^2(-1 + 0 - 0) - 0 = -1.$$

Für die Multiplikativität der Determinante müsste also $-1 = \gamma^2$ gelten. Da $\gamma \in \mathbb{R}$ ist, ist $\gamma^2 \geq 0$, womit diese Gleichung niemals erfüllt sein kann.

Daraus folgt zwingend, dass $\det M_{xy} = \det M_x \cdot \det M_y$ in den Algebren $\mathbb{Y}(k)$ nicht gilt. □

Folglich ist die Determinante nicht multiplikativ. Die Multiplikation mit einem beliebigen Element x wirkt in $\mathbb{Y}(k)$ nicht als algebraische Norm-Multiplikation, sondern schlicht als lineare Abbildung M_x auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

Die Menge der Nullteiler $\mathcal{Z}_\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{Y}(k) \setminus \{0\} \mid \det M_x = 0\}$ ist durch das kubische Polynom (5) definiert und bildet im $\mathbb{R}^3$ eine algebraische Fläche dritten Grades. Lineare Abbildungen erhalten im Allgemeinen keine algebraischen Flächen höheren Grades. Wird ein Punkt auf $\mathcal{Z}_\mathcal{D}$ mit M_x transformiert, verlässt er die Fläche fast immer. Dies erklärt die folgenden beobachteten Phänomene auf einheitliche Weise:

1. **Nullteiler $\times$ Nullteiler:** Für $x, y \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ mit $xy \neq 0$ ist das Produkt xy nicht durch das Matrixprodukt $M_x \cdot M_y$ bestimmt, sondern durch die bilineare Multiplikationsstruktur der Algebra. Da die Determinante nicht multiplikativ ist, existiert keine algebraische Sperre, die $\det M_x = 0$ und $\det M_y = 0$ auf $\det M_{xy} = 0$ erzwingt. Für fast alle Paare auf der Fläche $\mathcal{Z}_\mathcal{D} \times \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ ergibt die Auswertung $\det M_{xy} \neq 0$; das Produkt ist also generisch regulär.

2. **Nullteiler $\times$ Einheit:** Sei $x \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ und y regulär ($\det M_y \neq 0$). Das Produkt xy entspricht der Anwendung der linearen Abbildung M_y auf den Koordinatenvektor x. Da M_y eine lineare Koordinatentransformation durchführt, die die kubische Fläche $\mathcal{Z}_\mathcal{D}$ im Allgemeinen nicht auf sich selbst abbildet, wird x generisch aus der Singularitätsmenge herausgeschoben und das Produkt $xy = z$ ist regulär. Umgekehrt lässt sich jeder Nullteiler x generisch als Quotient zweier Einheiten z/y darstellen.

3. **Nullteiler $\div$ Einheit:** Sei $z \in \mathcal{Z}_\mathcal{D}$ und x regulär ($\det M_x \neq 0$). Der Quotient $y = z/x$ löst $M_x y = z$. Wiederum wirkt M_x als lineare Transformation auf $\mathbb{R}^3$. Da die kubische Fläche $\mathcal{Z}_\mathcal{D}$ unter der linearen Abbildung M_x im Allgemeinen nicht invariant ist, liegt der Quotient y generisch außerhalb von $\mathcal{Z}_\mathcal{D}$ und ist regulär. Umgekehrt lässt sich jeder Nullteiler z generisch als Produkt zweier Einheiten xy darstellen.

Bemerkung 5.7 (Ausnahmefälle)**.** Ausnahmen von der generischen Invertierbarkeit treten auf, wenn der Nullteiler durch die Multiplikation mit einem anderen Nullteiler oder einer Einheit bzw. durch die Division mit einer Einheit so transformiert wird, dass er auf der Nullteilerfläche der Algebra liegen bleibt. Beispielsweise kann das Produkt Nullteiler $\times$ Nullteiler wieder ein Nullteiler sein, wenn einer der Faktoren auf einer Raumdiagonalen liegt und der andere ein passender invertierbarer Nullteiler ist.

Numerische Beispiele für die generische Invertierbarkeit sowie für Ausnahmefälle werden in Abschnitt 7.5 anhand der Algebra $\mathbb{Y}(1)$ gezeigt.

6 Die acht fundamentalen Algebren $\mathbb{Y}(k)$ mit $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1\}$

In diesem Abschnitt werden die Algebren der Familie $\mathbb{Y}(k)$ untersucht, deren Parameter α, β, γ die Werte 0 oder 1 aufweisen. Diese Einschränkung liefert die einfachsten nicht-trivialen Kopplungen k zwischen der imaginären Einheit i und der dualen (nilpotenten) Einheit j und bildet damit die Grundlage für die gesamte Familie.

Für jede dieser acht Algebren werden die konkreten Formeln für Multiplikation und Division (eindeutiger Quotient) angegeben. Das multiplikative Inverse x^{-1} ergibt sich als Spezialfall des Quotienten für $z = 1$ (d.h. $p = 1,\ q = 0,\ r = 0$).

Zur Veranschaulichung der geometrischen Struktur der Nullteiler-Mengen sind Visualisierungen abgebildet. Diese wurden mit den Bibliotheken `plotly` (für die 3D-Darstellungen) und `matplotlib` (für die 2D-Schnitte) erstellt.

6.1 $\mathbb{Y}(0)$: $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$

Für die Algebra $\mathbb{Y}(0)$ gilt:

$$x = a + bi + cj, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = 0, \quad ij = ji = 0.$$

Multiplikation und Division (eindeutiger Quotient) ergeben sich durch Einsetzen der Parameter $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$ in die allgemeinen Formeln (3), (5) und (6).

Multiplikation $(y = d + ei + fj)$

$$xy = (ad - be) + (ae + bd)i + (af + cd)j.$$

Eindeutiger Quotient $(z = p + qi + rj,\ \det M_x = a(a^2 + b^2) \neq 0)$

$$\begin{aligned} z/x = &\frac{pa^2 + qab}{\det M_x} \\ &- \frac{pab - qa^2}{\det M_x}\, i \\ &- \frac{pac + qbc - r(a^2 + b^2)}{\det M_x}\, j. \end{aligned}$$

Die Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ besteht aus der Ebene $a = 0$. Mit Ausnahme der j-Achse sind alle Nullteiler der Ebene $a = 0$ invertierbar.

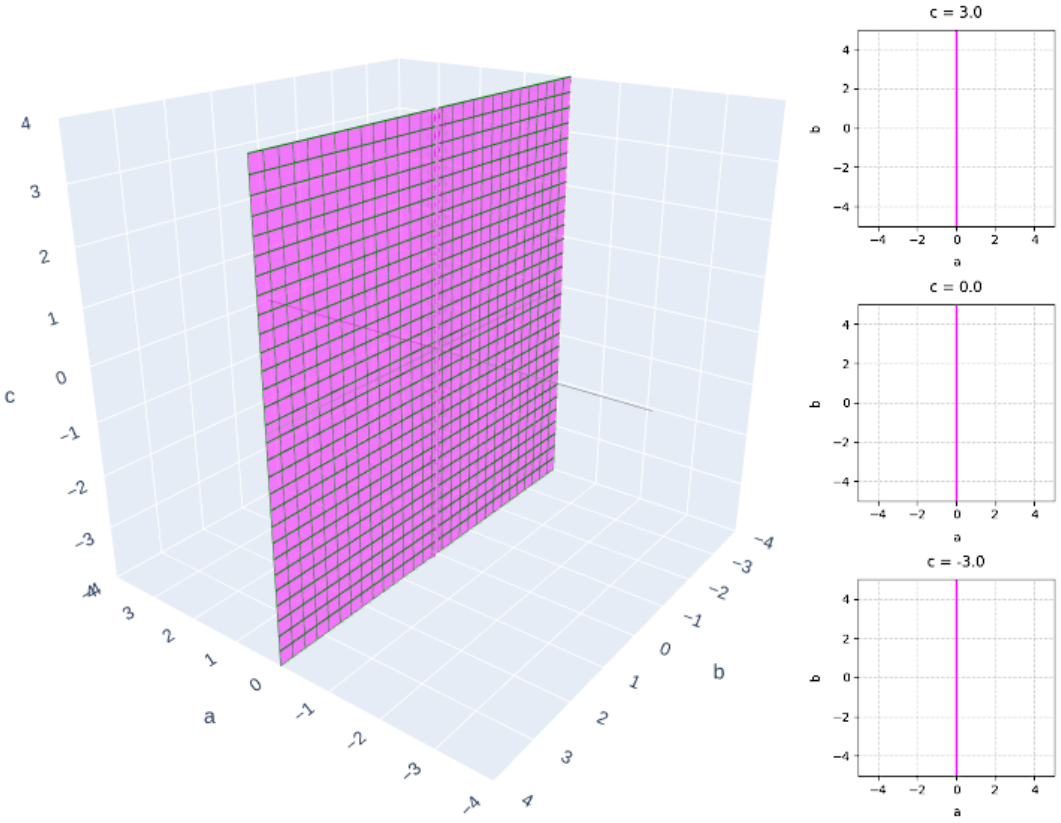

Abbildung 1: Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ für $\mathbb{Y}(0)$

6.2 $\mathbb{Y}(1)$: $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$

Für die Algebra $\mathbb{Y}(1)$ gilt:

$$x = a + bi + cj, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = 0, \quad ij = ji = 1.$$

Multiplikation und Division (eindeutiger Quotient) ergeben sich durch Einsetzen der Parameter $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$ in die allgemeinen Formeln (3), (5) und (6).

Multiplikation $(y = d + ei + fj)$

$$xy = (ad - be + bf + ce) + (ae + bd)i + (af + cd)j.$$

Eindeutiger Quotient $(z = p + qi + rj,\ \det M_x = a(a^2 + b^2 - 2bc) \neq 0)$

$$\begin{aligned} z/x = &\frac{pa^2 + q(ab - ac) - rab}{\det M_x} \\ &- \frac{pab - q(a^2 - bc) - rb^2}{\det M_x}\, i \\ &- \frac{pac + qc(b - c) - r(a^2 + b^2 - bc)}{\det M_x}\, j. \end{aligned}$$

Die Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ ist eine kubische Fläche. Horizontale Schnitte zeigen Kreise, durch die mittig eine Gerade verläuft, wodurch sich ein von der Ebene $a = 0$ durchschnittener Doppelkegel bildet. Alle Nullteiler der Ebene $a = 0$ sind invertierbar.

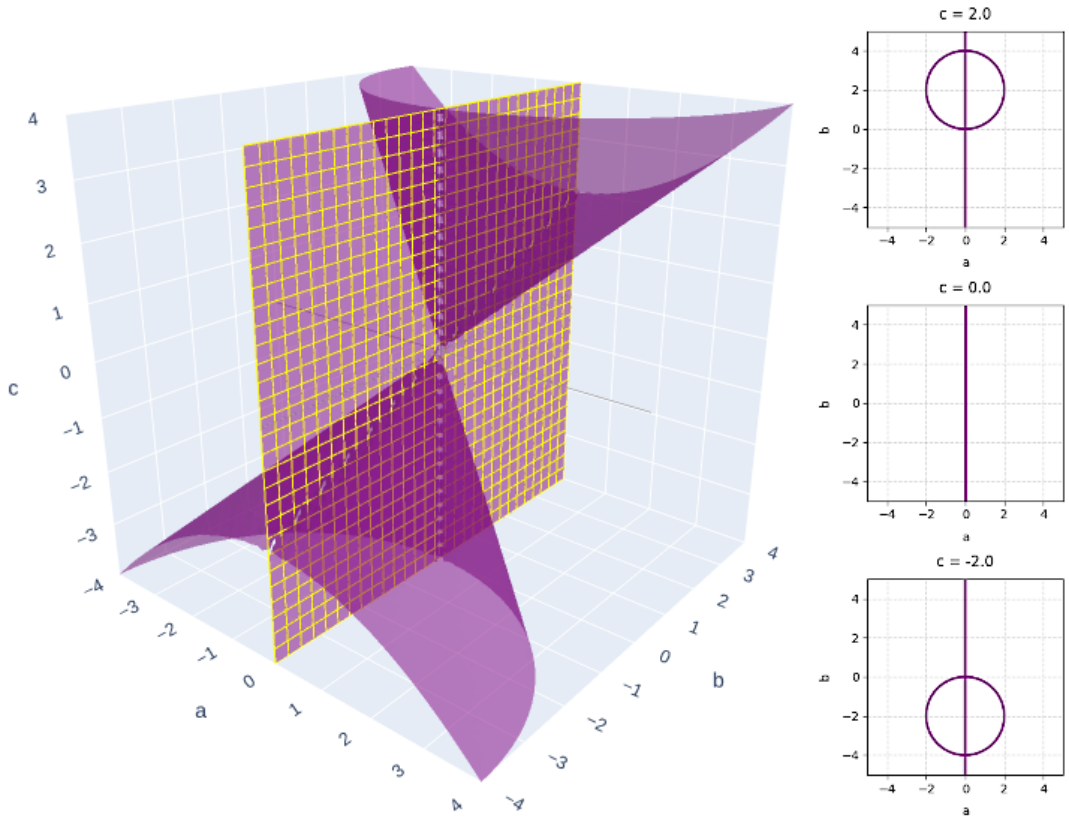

Abbildung 2: Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ für $\mathbb{Y}(1)$

6.3 $\mathbb{Y}(i)$: $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0$

Für die Algebra $\mathbb{Y}(i)$ gilt:

$$x = a + bi + cj, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = 0, \quad ij = ji = i.$$

Multiplikation und Division (eindeutiger Quotient) ergeben sich durch Einsetzen der Parameter $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 0$ in die allgemeinen Formeln (3), (5) und (6).

Multiplikation $(y = d + ei + fj)$

$$xy = (ad - be) + (ae + bd + bf + ce)i + (af + cd)j.$$

Eindeutiger Quotient $(z = p + qi + rj,\ \det M_x = a^2(a + c) + b^2(a - c) \neq 0)$

$$\begin{aligned} z/x = &\frac{pa(a + c) + qab - rb^2}{\det M_x} \\ &- \frac{pb(a - c) - qa^2 + rab}{\det M_x}\, i \\ &- \frac{pc(a + c) + qbc - r(a^2 + b^2 + ac)}{\det M_x}\, j. \end{aligned}$$

Die Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ ist eine gekrümmte, kubische Fläche. Horizontale Schnitte zeigen kubische Kurven mit einem Doppelpunkt auf der j-Achse, die u.a. einen Doppelkegel bilden. Die invertierbaren Nullteiler liegen auf der i-Achse sowie auf der Geraden $b = 0$, $a = -c$.

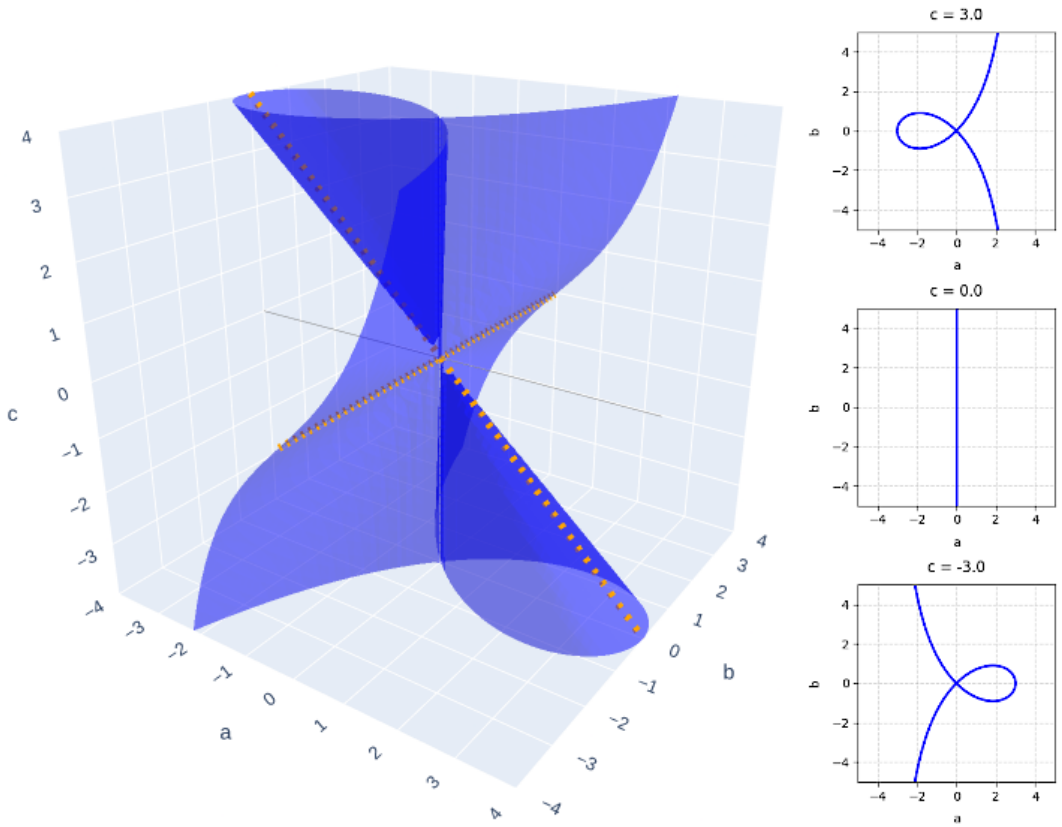

Abbildung 3: Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ für $\mathbb{Y}(i)$

6.4 $\mathbb{Y}(1+i)$: $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 0$

Für die Algebra $\mathbb{Y}(1+i)$ gilt:

$$x = a + bi + cj, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = 0, \quad ij = ji = 1 + i.$$

Multiplikation und Division (eindeutiger Quotient) ergeben sich durch Einsetzen der Parameter $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 0$ in die allgemeinen Formeln (3), (5) und (6).

Multiplikation $(y = d + ei + fj)$

$$xy = (ad - be + bf + ce) + (ae + bd + bf + ce)i + (af + cd)j.$$

Eindeutiger Quotient $(z = p + qi + rj,\ \det M_x = a^2(a+c) + b^2(a-c) - 2abc \neq 0)$

$$\begin{aligned} z/x = &\frac{pa(a+c) + qa(b-c) - rb(a+b)}{\det M_x} \\ &- \frac{pb(a-c) - q(a^2 - bc) + rb(a-b)}{\det M_x}\, i \\ &- \frac{pc(a+c) + qc(b-c) + r(a^2 + b^2 + c(a-b))}{\det M_x}\, j. \end{aligned}$$

Die Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ ist eine gekrümmte, kubische Fläche. Horizontale Schnitte zeigen kubische Kurven mit einem Doppelpunkt auf der j-Achse, die u.a. einen Doppelkegel bilden. Die invertierbaren Nullteiler liegen auf der i-Achse sowie auf der Geraden $b = 0$, $a = -c$.

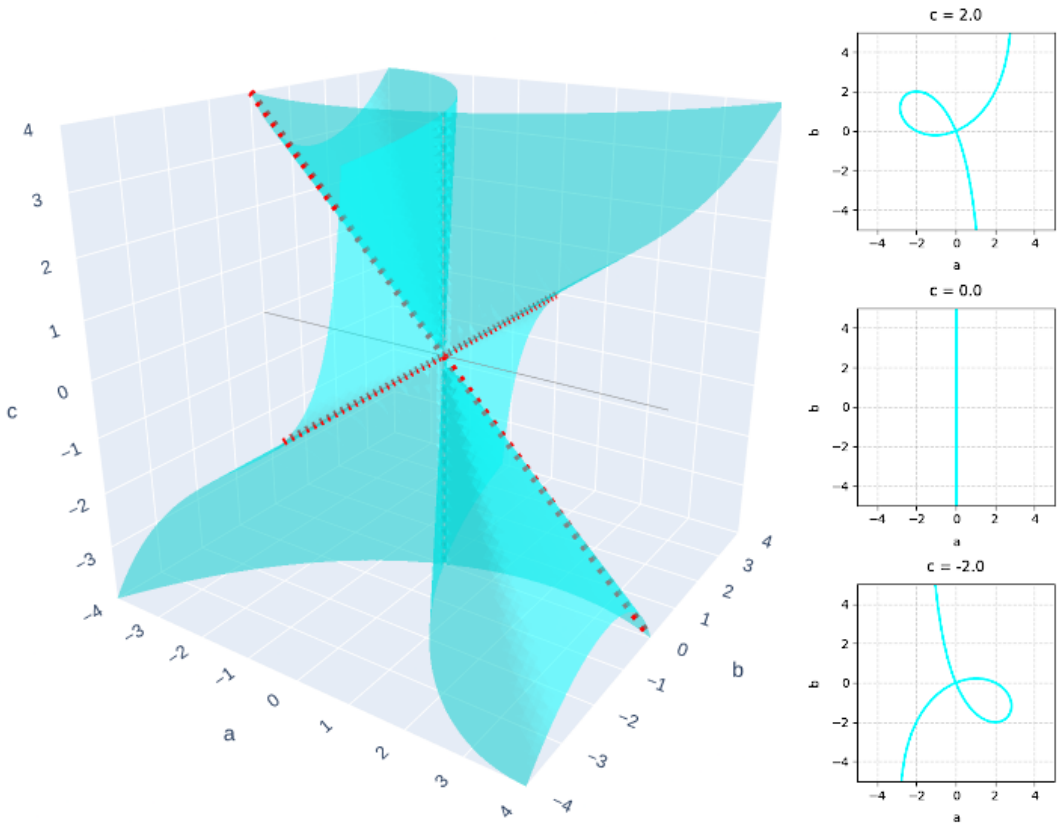

Abbildung 4: Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ für $\mathbb{Y}(1+i)$

6.5 $\mathbb{Y}(j)$: $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$

Für die Algebra $\mathbb{Y}(j)$ gilt:

$$x = a + bi + cj, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = 0, \quad ij = ji = j.$$

Multiplikation und Division (eindeutiger Quotient) ergeben sich durch Einsetzen der Parameter $\alpha = 0,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$ in die allgemeinen Formeln (3), (5) und (6).

Multiplikation $(y = d + ei + fj)$

$$xy = (ad - be) + (ae + bd)i + (af + cd + bf + ce)j.$$

Eindeutiger Quotient $(z = p + qi + rj,\ \det M_x = a^2(a+b) + b^2(a+b) \neq 0)$

$$\begin{aligned} z/x = &\frac{pa(a+b) + qb(a+b)}{\det M_x} \\ &- \frac{pb(a+b) - qa(a+b)}{\det M_x}\, i \\ &- \frac{pc(a-b) + qc(a+b) - r(a^2+b^2)}{\det M_x}\, j. \end{aligned}$$

Die Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ besteht aus der Ebene $a = -b$. Die invertierbaren Nullteiler liegen auf der Geraden $c = 0$, $a = -b$.

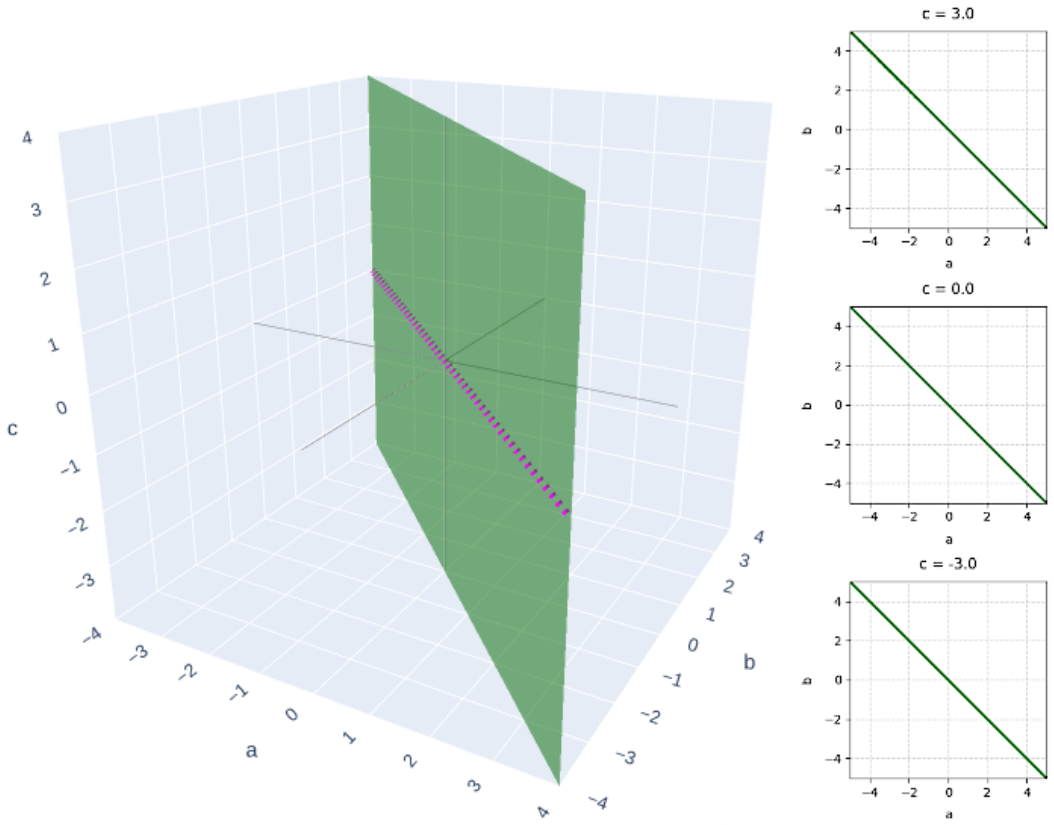

Abbildung 5: Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ für $\mathbb{Y}(j)$

6.6 $\mathbb{Y}(1+j)$: $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$

Für die Algebra $\mathbb{Y}(1+j)$ gilt:

$$x = a + bi + cj, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = 0, \quad ij = ji = 1 + j.$$

Multiplikation und Division (eindeutiger Quotient) ergeben sich durch Einsetzen der Parameter $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = 1$ in die allgemeinen Formeln (3), (5) und (6).

Multiplikation $(y = d + ei + fj)$

$$xy = (ad - be + bf + ce) + (ae + bd)i + (af + cd + bf + ce)j.$$

Eindeutiger Quotient $(z = p + qi + rj,\ \det M_x = a^2(a+b) + b^2(a+b) - 2abc \neq 0)$

$$\begin{aligned} z/x = &\frac{pa(a+b) + q(ab + b^2 - ac) - rab}{\det M_x} \\ &- \frac{pb(a+b) - q(a^2 + ab - bc) - rb^2}{\det M_x}\, i \\ &- \frac{pc(a-b) + qc(a+b-c) - r(a^2 + b^2 - bc)}{\det M_x}\, j. \end{aligned}$$

Die Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ ist eine gekrümmte, kubische Fläche. Horizontale Schnitte zeigen kubische Kurven mit einem Doppelpunkt auf der j-Achse, die u.a. einen Doppelkegel bilden. Die invertierbaren Nullteiler liegen auf der j-Achse sowie auf der Geraden $c = 0$, $a = -b$.

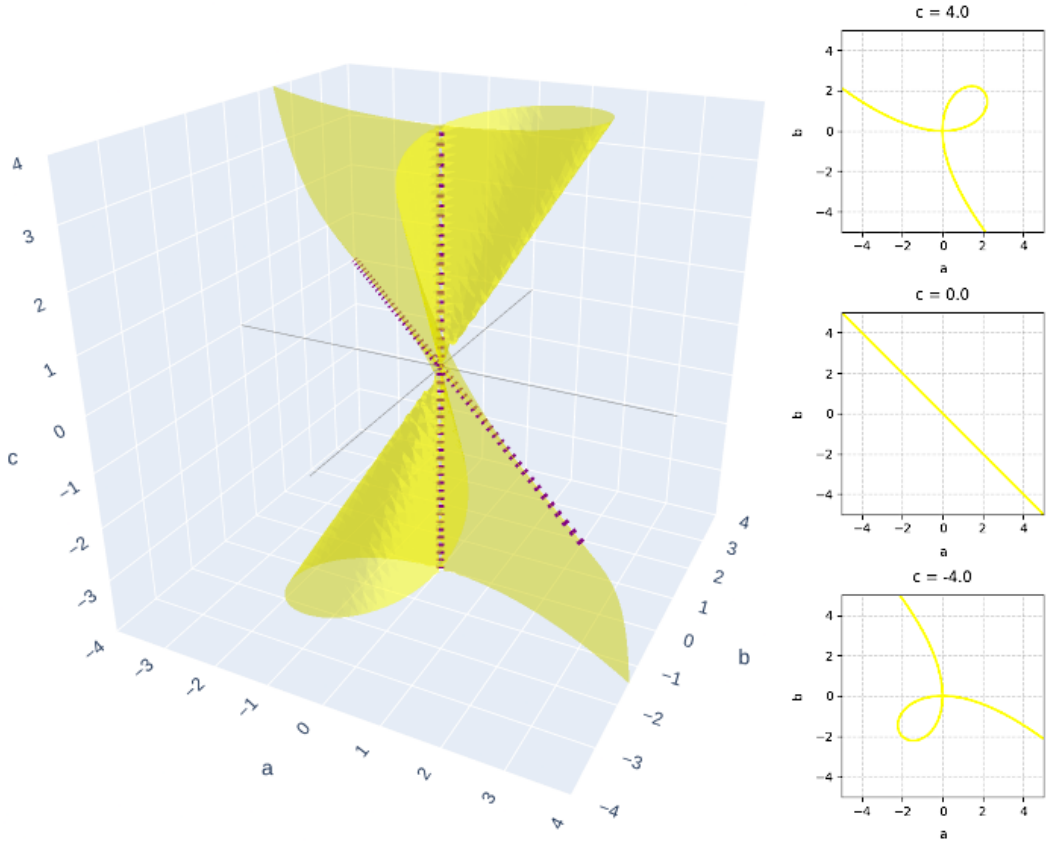

Abbildung 6: Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ für $\mathbb{Y}(1+j)$

6.7 $\mathbb{Y}(i+j)$: $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$

Für die Algebra $\mathbb{Y}(i+j)$ gilt:

$$x = a + bi + cj, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = 0, \quad ij = ji = i + j.$$

Multiplikation und Division (eindeutiger Quotient) ergeben sich durch Einsetzen der Parameter $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$ in die allgemeinen Formeln (3), (5) und (6).

Multiplikation $(y = d + ei + fj)$

$$xy = (ad - be) + (ae + bd + bf + ce)i + (af + cd + bf + ce)j.$$

Eindeutiger Quotient $(z = p + qi + rj,\ \det M_x = a^2(a+b+c) + b^2(a+b-c) \neq 0)$

$$\begin{aligned} z/x = &\frac{pa(a+b+c) + qb(a+b) - rb^2}{\det M_x} \\ &- \frac{pb(a+b-c) - qa(a+b) + rab}{\det M_x}\, i \\ &- \frac{pc(a-b+c) + qc(a+b) - r(a^2+b^2+ac)}{\det M_x}\, j. \end{aligned}$$

Die Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ ist eine kubische Fläche. Horizontale Schnitte zeigen Kreise, durch die mittig eine Gerade verläuft, wodurch sich ein von der Ebene $a = -b$ durchschnittener Doppelkegel bildet. Die invertierbaren Nullteiler liegen auf den Geraden $c = 0$, $a = -b$ sowie $a = 0$, $b = c$ und $b = 0$, $a = -c$.

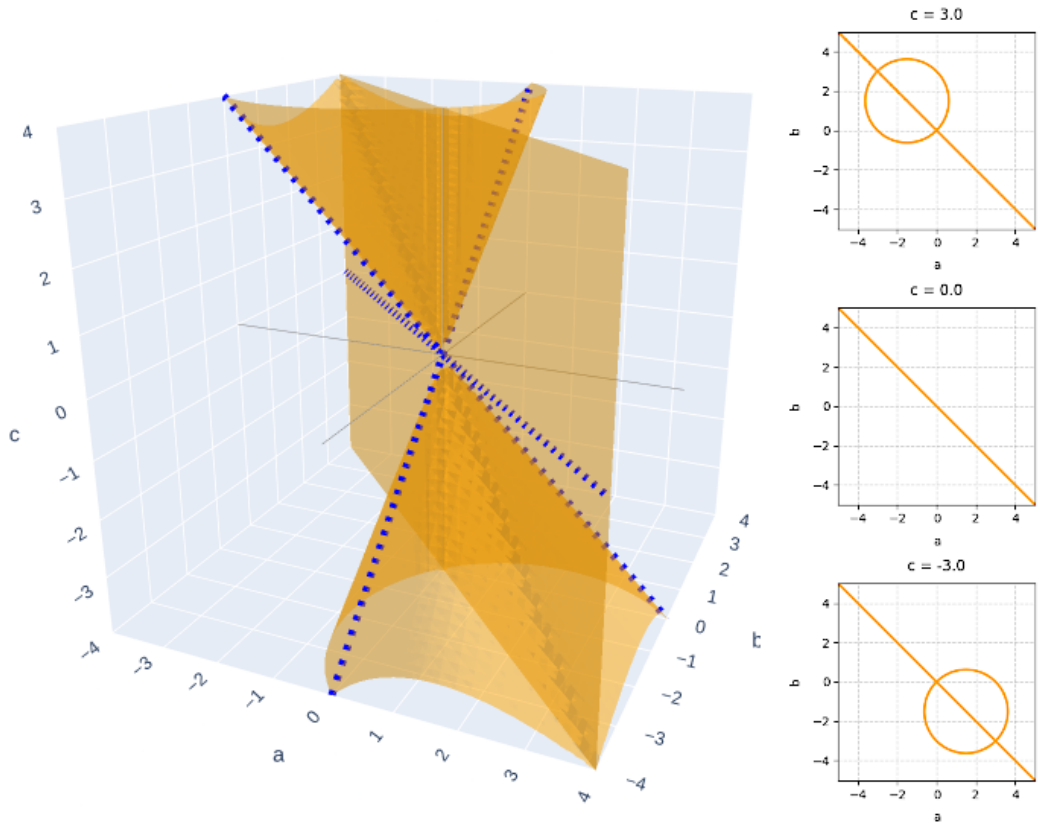

Abbildung 7: Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ für $\mathbb{Y}(i+j)$

6.8 $\mathbb{Y}(1+i+j)$: $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$

Für die Algebra $\mathbb{Y}(1+i+j)$ gilt:

$$x = a + bi + cj, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad i^2 = -1, \quad j^2 = 0, \quad ij = ji = 1 + i + j.$$

Multiplikation und Division (eindeutiger Quotient) ergeben sich durch Einsetzen der Parameter $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1$ in die allgemeinen Formeln (3), (5) und (6).

Multiplikation $(y = d + ei + fj)$

$$xy = (ad - be + bf + ce) + (ae + bd + bf + ce)i + (af + cd + bf + ce)j.$$

Eindeutiger Quotient $(z = p + qi + rj,\ \det M_x = a^2(a+b+c) + b^2(a+b-c) - 2abc \neq 0)$

$$\begin{aligned} z/x = &\frac{pa(a+b+c) + q(ab + b^2 - ac) - rb(a+b)}{\det M_x} \\ &- \frac{pb(a+b-c) - q(a^2 + ab - bc) + rb(a-b)}{\det M_x}\, i \\ &- \frac{pc(a-b+c) + qc(a+b-c) - r(a^2 + b^2 + c(a-b))}{\det M_x}\, j. \end{aligned}$$

Die Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ ist eine gekrümmte, kubische Fläche. Horizontale Schnitte zeigen kubische Kurven mit einem Doppelpunkt auf der j-Achse, die u.a. einen Doppelkegel bilden. Die invertierbaren Nullteiler liegen auf den Geraden $c = 0$, $a = -b$ und $a = 0$, $b = c$.

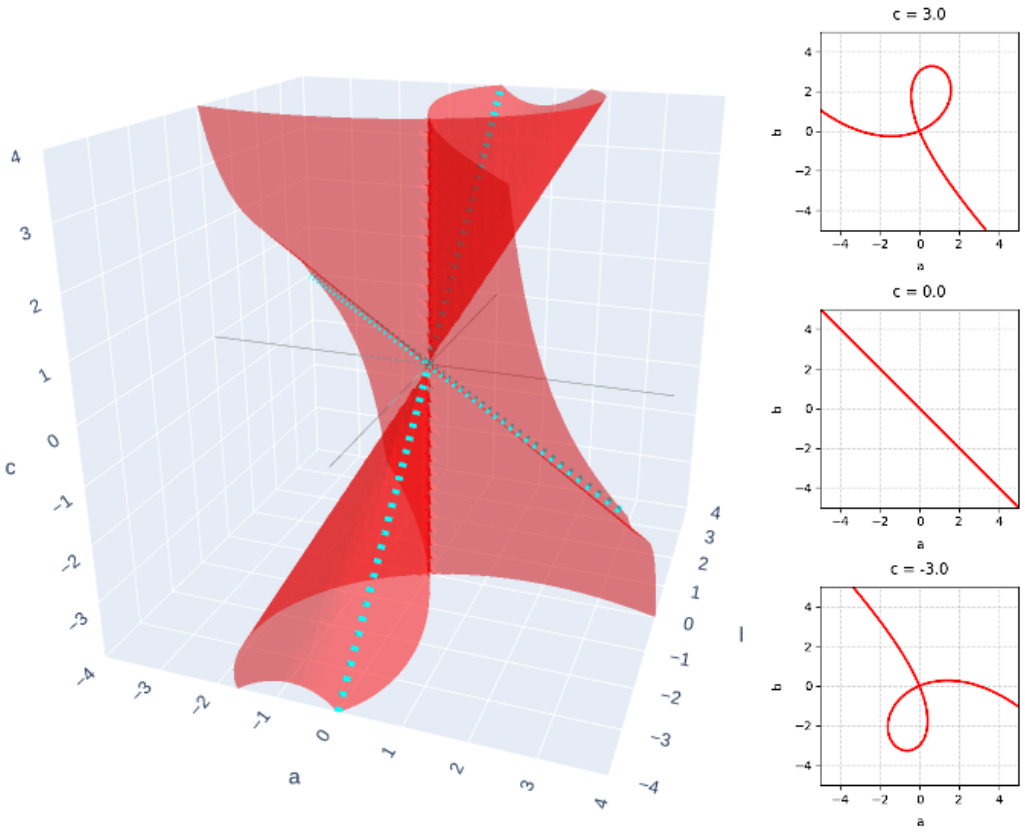

Abbildung 8: Nullteiler-Menge $\det M_x = 0$ für $\mathbb{Y}(1+i+j)$

Bemerkung 6.1 (Ebene in $\mathbb{Y}(i+j)$)**.** Für die Algebra $\mathbb{Y}(i+j)$ ($\alpha=0, \beta=1, \gamma=1$) zeigt Abbildung 7 als Teil der Nullteilermenge $\det M_x = 0$ die Ebene $a=-b$. Diese entsteht, weil sich $\det M_x$ faktorisieren lässt:

$$\det M_x = a^2(a+b+c) + b^2(a+b-c) = (a+b)\big(a^2+b^2+c(a-b)\big).$$

Allgemeiner tritt eine solche Faktorisierung stets bei den Algebren der Form $\mathbb{Y}(\beta i+\gamma j)$ auf, sofern $|\gamma|=1$:

$$\det M_x = (a+\gamma b)\big(a^2+b^2+\beta c(a-\gamma b)\big).$$

In diesen Fällen enthält die Nullteiler-Menge eine der Ebenen $a=-b$ (für $\gamma=1$) oder $a=b$ (für $\gamma=-1$). Für $|\gamma|\neq 1$ tritt für die Algebren $\mathbb{Y}(\beta i+\gamma j)$ keine solche Faktorisierung auf: die Nullteilermenge $\det M_x = 0$ ähnelt dann den gezeigten gekrümmten, kubischen Flächen (vgl. Abbildungen 3, 4, 6, 8).

7 Numerische Beispiele für die Algebra $\mathbb{Y}(1)$

Im Folgenden werden die Rechenregeln aus Abschnitt 4 sowie die algebraischen Phänomene aus Abschnitt 5 anhand numerischer Beispiele für die Algebra $\mathbb{Y}(1)$ (vgl. Abschnitt 6.2)verdeutlicht. Diese weist aus Sicht des Autors die interessanteste Nullteiler-Struktur auf und definiert zugleich die drei fundamentalsten Entitäten der Mathematik: $1=ij=ji$, $-1=i^2$ und $0=j^2$.

7.1 Wohldefinierte Division für reguläre Elemente

Für reguläre Elemente (d.h. $\det M_x \neq 0$) ist der Quotient z/x eindeutig definiert und erfüllt die bekannte Beziehung: Aus $xy=z$ folgt sowohl $z/x=y$ als auch $z/y=x$.

Beispiel

Seien $x=(1,2,3)$ (d.h. $x=1+2i+3j$) und $y=(4,5,6)$ (d.h. $y=4+5i+6j$). Beide sind regulär, da

$$\det M_x = a(a^2+b^2-2bc) = 1(1+4-12) = -7 \neq 0, \qquad \det M_y = 4(16+25-60) = 4(-19) = -76 \neq 0.$$

Multiplikation $xy=z$: Aus der Multiplikationsformel für $\mathbb{Y}(1)$ (vgl. Abschnitt 6.2) folgt

$$xy = (1\cdot 4 - 2\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 5) + (1\cdot 5 + 2\cdot 4)i + (1\cdot 6 + 3\cdot 4)j = 21 + 13i + 18j.$$

Also $z=(21,13,18)$.

Division $z/x=y$: Die Divisionsformel für $\mathbb{Y}(1)$ (vgl. Abschnitt 6.2) liefert mit $a=1, b=2, c=3$ und $p=21, q=13, r=18$

$$\begin{aligned} z/x = {} & \frac{21\cdot 1^2 + 13(1\cdot 2 - 1\cdot 3) - 18\cdot 1\cdot 2}{-7} \\ & - \frac{21\cdot 1\cdot 2 - 13(1^2 - 2\cdot 3) - 18\cdot 2^2}{-7}\, i \\ & - \frac{21\cdot 1\cdot 3 + 13\cdot 3(2-3) - 18(1^2+2^2-2\cdot 3)}{-7}\, j \\ & = \frac{-28}{-7} - \frac{35}{-7}\, i - \frac{42}{-7}\, j = 4 + 5i + 6j. \end{aligned}$$

Also $y=(4,5,6)$. Die Rechnung für $z/y=x$ verläuft analog und liefert $(1,2,3)$.

Inverses x^{-1}: Aus der Inversenformel 8 erhält man für $\mathbb{Y}(1)$

$$x^{-1} = \left(\frac{1\cdot 1}{-7}, -\frac{2\cdot 1}{-7}, -\frac{3\cdot 1}{-7}\right) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right).$$

Multiplikation $z\cdot x^{-1}$: Das Produkt $z\cdot x^{-1}$ (mit $z=(21,13,18)$ und $x^{-1}=(-\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7})$) ergibt

$$z\cdot x^{-1} = \left(4, \frac{29}{7}, \frac{45}{7}\right).$$

Dies ist nicht gleich $y = z/x = (4,5,6)$. Die Gleichheit $z/x = z\cdot x^{-1}$ gilt somit nicht; die Division in $\mathbb{Y}(k)$ ist nicht durch Multiplikation mit dem Inversen ersetzbar. Die Gleichheit $z/x = z\cdot x^{-1}$ tritt nur dann ein, wenn der Dividend z eine reelle Zahl ist (d.h. $q=r=0$).

7.2 Division durch Nullteiler

Die Division z/x ist für einen Nullteiler x definiert, wenn das lineare System $M_x y = z$ lösbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Dividend $z=(p,q,r)$ im Bild (Spaltenraum) von M_x liegt.

Für $\mathbb{Y}(1)$ lautet die Matrix

$$M_x = \begin{pmatrix} a & -b+c & b \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Da x ein Nullteiler ist, gilt $\det M_x = 0$ und $\operatorname{rang}(M_x) = 2$; der Spaltenraum von M_x ist daher eine Ebene durch den Ursprung. Für die Bestimmung eines Normalenvektors n der Spaltenraumebene müssen in $\mathbb{Y}(1)$ zwei Fälle unterschieden werden:

- **Fall 1:** $a \neq 0$ (d.h. x liegt auf dem Doppelkegel). Aus den Orthogonalitätsbedingungen zu zwei linear unabhängigen Spalten von M_x liefert eine kurze Rechnung den Normalenvektor

  $$n = (a,\ b-c,\ -b).$$

  Die Ebene des Spaltenraums wird daher beschrieben durch

  $$ap + (b-c)q - br = 0. \tag{10}$$

- **Fall 2:** $a = 0$ (d.h. x liegt auf der Nullteiler-Ebene). Aus den Orthogonalitätsbedingungen zu zwei linear unabhängigen Spalten von M_x ergibt sich der Normalenvektor

  $$n = (0,\ -c,\ b).$$

  Die Ebene des Spaltenraums lautet dann

  $$-cq + br = 0. \tag{11}$$

Der Spaltenraum ist für alle Nullteiler auf derselben Geraden durch den Ursprung (d.h. alle Vielfachen λx mit $\lambda \in \mathbb{R}$) identisch, da $M_{\lambda x} = \lambda M_x$ gilt und die Skalierung einer Matrix ihren Spaltenraum nicht ändert (für $\lambda \neq 0$).

Die folgenden beiden Abbildungen zeigen beispielhaft die Spaltenräume der Matrix M_x für x=(4,2,5) (Fall 1) und x=(0,1,5) (Fall 2) als jeweils blaue Ebene. Die Nullteiler und ihrer Geraden sind in rot dargestellt, die Schnittgeraden durch die Nullteilermenge in grün. Für Nullteiler auf dem Doppelkegel berührt die Ebene des Spaltenraums die Nullteilergerade. Für Nullteiler auf der Ebene $a=0$ ist die Ebene des Spaltenraums orthogonal zur Nullteilerebene angeordnet und durchschneidet den Doppelkegel, sofern der Nullteiler im Inneren desselben liegt.

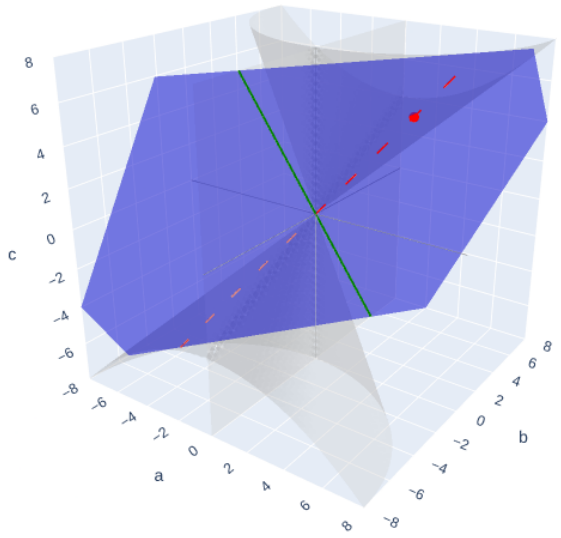

Abbildung 9: Spaltenraum M_x (x=(4,2,5))

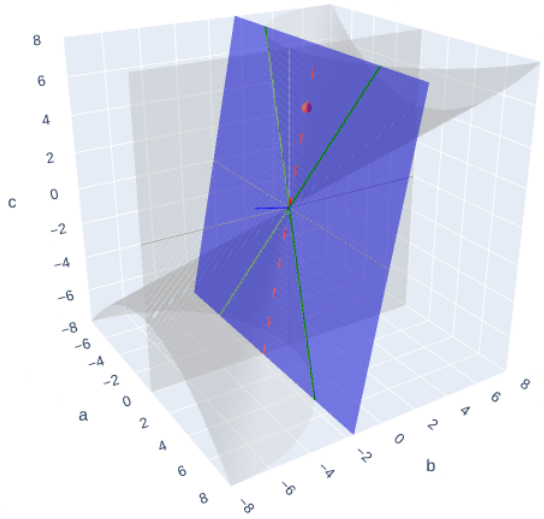

Abbildung 10: Spaltenraum M_x (x=(0,1,5))

Beispiel

Sei $x = (4, 2, 5)$ (d.h. $x = 4 + 2i + 5j$). Wegen

$$\det M_x = a(a^2 + b^2 - 2bc) = 4\big(16 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 5\big) = 4(20 - 20) = 0$$

ist x ein Nullteiler (er liegt auf dem Doppelkegel).

Sei der Dividend $z = (2, 2, 1)$ (d.h. $z = 2 + 2i + 1j$). Wegen $4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 8 - 6 - 2 = 0$ aus Gleichung 10 liegt z im Spaltenraum von M_x.

Die Matrix M_x für $x = (4, 2, 5)$ in $\mathbb{Y}(1)$ lautet

$$M_x = \begin{pmatrix} 4 & -2+5 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das lineare System $M_x y = z$ ergibt:

$$\begin{cases} 4d + 3e + 2f = 2 & (1) \\ 2d + 4e = 2 & (2) \\ 5d + 4f = 1 & (3) \end{cases}$$

Eine partikuläre Lösung erhält man z.B. durch Wahl $e = 0$: aus Gleichung (2) folgt: $2d = 2 \Rightarrow d = 1$, aus (3) folgt: $4f = 1-5 = -4 \Rightarrow f = -1$. Einsetzen in (1) bestätigt: $4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 4 + 0 - 2 = 2$. Also ist eine partikuläre Lösung: $y_p = (1, 0, -1)$.

Zur Bestimmung des Kerns von M_x ergibt das homogene System $M_x y = 0$:

$$\begin{cases} 4d + 3e + 2f = 0 & (1) \\ 2d + 4e = 0 & (2) \\ 5d + 4f = 0 & (3) \end{cases}$$

Aus Gleichung (2) folgt: $2d = -4e \Rightarrow d = -2e$, aus (3) folgt: $4f = -5d = -5(-2e) = 10e \Rightarrow f = \frac{5}{2}e$. Einsetzen in (1) bestätigt: $4 \cdot (-2e) + 3e + 2 \cdot \frac{5}{2}e = -8e + 3e + 5e = 0$.

Für die Wahl $e = 2$ findet sich als ein Basisvektor des Kerns $\ker M_x$: $y_0 = (-4, 2, 5)$.

Die Lösungsmenge für den Quotienten $y = z/x$ ist daher die affine Gerade

$$y = y_p + \lambda y_0 = (1 - 4\lambda) \; + \; 2\lambda \cdot i \; + \; (-1 + 5\lambda) \cdot j, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Die Division durch einen Nullteiler ist nicht eindeutig. Für $\lambda = 0$ erhält man $y = 1 - j$, für $\lambda = 1$ erhält man $y = -3 + 2i + 4j$. Jede Wahl von λ liefert einen Quotienten $y = z/x$.

7.3 Invertierbare Nullteiler

In $\mathbb{Y}(1)$ sind alle Elemente der Ebene $a = 0$ (d.h. $x = bi + cj$) mit $(b, c) \neq (0, 0)$ invertierbare Nullteiler. Sei $x = (0, 1, 2)$ (d.h. $x = i + 2j$). Wegen

$$\det M_x = a(a^2 + b^2 - 2bc) = 0\big(0 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2\big) = 0$$

ist x ein Nullteiler. Die Inversen von x erhält man aus der allgemeinen Formel für den Fall $a = 0$ (siehe Satz 5.3):

$$x^{-1} = -\frac{1}{b}\, i \; + \; \frac{c}{b^2}\, j \; + \; \lambda\big(-\beta b \; + \; \alpha b\, i \; + \; (b - \alpha c) j\big).$$

Einsetzen von $b = 1, c = 2, \alpha = 1, \beta = 0$ liefert

$$x^{-1} = -i + 2j + \lambda\big(0 + 1 \cdot 1 \cdot i + (1 - 1 \cdot 2)j\big) = -i + 2j + \lambda(i - j).$$

Die Lösungsmenge für das Inverse von x ist also die affine Gerade

$$x^{-1} = (\lambda - 1)\, i + (2 - \lambda)\, j, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Für $\lambda = 0$ erhält man $x^{-1} = -i + 2j$, für $\lambda = 2$ erhält man $x^{-1} = i$. Jede Wahl von λ liefert ein Inverses von x.

7.4 Partnergeraden

Nullteiler auf dem Doppelkegel ($a^2 + b^2 = 2bc$)

Für den Nullteiler $x = (4, 2, 5)$ wurde in Abschnitt 7.2 ein Basisvektor des Kerns $\ker M_x$ zu $y_0 = (-4, 2, 5)$ bestimmt. Die Partnergerade ist daher

$$P(x) = \ker M_x = \{\lambda(-4, 2, 5) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Auffällig ist, dass der gewählte Basisvektor $(-4, 2, 5)$ bis auf das Vorzeichen der ersten Komponente die gleichen Werte wie $x = (4, 2, 5)$ hat.

In $\mathbb{Y}(1)$ gilt für jeden Nullteiler auf dem Doppelkegel (d.h. $a \neq 0$): Ist (a, b, c) ein Nullteiler, so ist $(-a, b, c)$ stets ein Nullteilerpartner. Denn das Produkt ergibt verschwindende i- und j-Anteile sowie den Realteil $-a^2 - b^2 + 2bc = 0$. Somit ist $(-a, b, c)$ stets ein Nullteilerpartner von (a, b, c) und umgekehrt.

Nullteiler auf der Ebene ($a = 0$)

Für den Nullteiler $x = (0, 1, 2)$ in $\mathbb{Y}(1)$ lautet die Matrix

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & -1+2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Kerns von M_x ergibt das homogene System $M_x y = 0$:

$$\begin{cases} e + f = 0 & (1) \\ d = 0 & (2) \\ 2d = 0 & (3) \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt $d = 0$; aus (1) folgt $e = -f$. Ein Basisvektor des Kerns $\ker M_x$ ist daher $y_0 = (0, 1, -1)$, und die Partnergerade ist

$$P(x) = \{\lambda(0, 1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbb{Y}(1)$ gilt für jeden Nullteiler $x = (0, b, c)$: $(0, b, b - c)$ ist Nullteilerpartner von $(0, b, c)$. Denn das Produkt ergibt verschwindende i- und j-Anteile sowie den Realteil $-b^2+b(b-c)+cb = -b^2+b^2-bc+bc = 0$. Somit ist $(0, b, b-c)$ stets ein Nullteilerpartner von $(0, b, c)$ und umgekehrt.

7.5 Generische Invertierbarkeit von Nullteiler-Produkten und -Quotienten

7.5.1 Nullteiler × Nullteiler

Im Folgenden werden drei typische Beispiele für Produkte von Nullteilern x, y mit $xy \neq 0$ in $\mathbb{Y}(1)$ gezeigt, deren Ergebnisse somit jeweils invertierbar sind:

Beide Faktoren auf dem Kegel: Seien $x = (4, 2, 5)$ (vgl. Abschnitt 7.2) und $y = (2, 2, 2)$ ($\det M_y = a^2 + b^2 - 2bc = 4 + 4 - 8 = 0$) Nullteiler auf dem Doppelkegel. Das Produkt ergibt

$$(4, 2, 5) \cdot (2, 2, 2) = (18,\ 12,\ 18).$$

Da für $z = (18, 12, 18)$ die Determinante $\det M_z = a(a^2+b^2-2bc) = 18(324+144-2\cdot12\cdot18) = 18(468 - 432) = 18 \cdot 36 = 648 \neq 0$ ist, ist z kein Nullteiler, sondern invertierbar.

Ein Faktor auf dem Kegel, einer auf der Ebene: Seien $x = (4, 2, 5)$ ein Nullteiler auf dem Doppelkegel und $y = (0, 1, 2)$ ein Nullteiler auf der Ebene $a = 0$. Das Produkt ergibt

$$(4, 2, 5) \cdot (0, 1, 2) = (7,\ 4,\ 8).$$

Für $z = (7, 4, 8)$ ist die Determinante $\det M_z = 7(49+16-2\cdot4\cdot8) = 7(65-64) = 7 \neq 0$, sodass z kein Nullteiler, sondern invertierbar ist.

Beide Faktoren auf der Ebene: Seien $x = (0, 1, 2)$ und $y = (0, 2, 3)$ Nullteiler auf der Ebene $a = 0$. Das Produkt ergibt

$$(0, 1, 2) \cdot (0, 2, 3) = (5,\ 0,\ 0).$$

Da $z = (5, 0, 0)$ eine reelle Zahl und deren Determinante $\det M_z = 5^3 = 125 \neq 0$ ist, ist z kein Nullteiler, sondern invertierbar. Bei der Multiplikation zweier Elemente mit $a = 0$ verschwinden die i- und j-Anteile in $\mathbb{Y}(1)$ immer, so dass das Produkt stets eine reelle Zahl ist.

Ausnahmen

Die generische Invertierbarkeit gilt in $\mathbb{Y}(1)$ nicht in den folgenden speziellen Fällen:

- **Raumdiagonale** × $(0, b, b)$**:** Für $x = (a, a, a)$ bzw. $x = (-a, a, a)$ und $y = (0, b, b)$ gilt

  $$(a, a, a) \cdot (0, b, b) = (ab,\ ab,\ ab), \qquad (-a, a, a) \cdot (0, b, b) = (ab,\ -ab,\ -ab).$$

  Das Produkt liegt jeweils auf derselben zur Nullteilermenge gehörenden Raumdiagonale und ist somit wieder ein Nullteiler.

- **Raumdiagonale** × $(0, b, 0)$**:** Für $x = (a, a, a)$ bzw. $(-a, a, a)$ und $y = (0, b, 0)$ ergibt sich

  $$(a, a, a) \cdot (0, b, 0) = (0,\ ab,\ 0), \qquad (-a, a, a) \cdot (0, b, 0) = (0,\ -ab,\ 0).$$

  Das Produkt liegt stets auf der i-Achse und ist wieder ein Nullteiler.

- **Zwei Nullteiler auf derselben Erzeugenden des Kegels:** Für zwei Nullteiler $x = (a, b, c)$ und $y = \lambda x = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ auf derselben Gerade des Doppelkegels gilt:

$$x \cdot (\lambda x) = 2\lambda a \cdot (a, b, c).$$

  Das Produkt liegt auf derselben Geraden durch den Ursprung wie x und ist daher wieder ein Nullteiler.

7.5.2 Nullteiler × Einheit

Seien $x = (4, 2, 5)$ ein Nullteiler (vgl. Abschnitt 7.2) und $y = (1, 2, 3)$ invertierbar (vgl. Abschnitt 7.1). Das Produkt xy ergibt

$$(4, 2, 5) \cdot (1, 2, 3) = (16,\ 10,\ 17).$$

Da für $z = (16, 10, 17)$ die Determinante $\det M_z = a(a^2 + b^2 - 2bc) = 16(256 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 17) = 16(356 - 340) = 16 \cdot 16 = 256 \neq 0$ ist, ist z kein Nullteiler, sondern invertierbar.

Umgekehrt lässt sich jeder Nullteiler x generisch als Quotient zweier Einheiten z/y darstellen. Beispiel: $(16, 10, 17)/(1, 2, 3) = (4, 2, 5)$.

Ausnahmen

Die generische Invertierbarkeit gilt für das Produkt Nullteiler × Einheit in $\mathbb{Y}(1)$ nicht in den folgenden Ausnahmekonstellationen:

- **Reelle Skalierung:** Die Einheit $y = (d, e, f)$ ist eine reelle Zahl ($e = f = 0$). Dann verbleibt das Produkt xy wegen der Homogenität der Determinante auf derselben Nullteilergeraden durch den Ursprung, wie der Ausgangsnullteiler x.
- **Verschwindender Realteil:** Für einen Nullteiler $x = (a, b, c)$ und eine Einheit $y = (d, e, f)$ wird der Realteil des Produkts xy Null, d.h. $ad + (c - b)e + bf = 0$. Die Gleichung definiert eine Ebene im Raum der Einheiten y. Beispiel: Für $x = (4, 2, 5)$ und $y = (1, 0, -2)$ ($\det M_y = 1$) ergibt $xy = (0, 2, -3)$ (liegt auf der Ebene $a = 0$ und ist somit ein Nullteiler).
- **Abbildung auf den Kegel:** Die Bedingung für das Abbilden des Produkts xy eines Nullteilers $x = (a, b, c)$ und einer Einheit $y = (d, e, f)$ auf den Doppelkegel, hängt von der Lage des Nullteilers x ab:
  - Liegt x selbst auf dem Kegel ($a^2 + b^2 - 2bc = 0$), lautet die Bedingung $ce - bf = 0$. Diese definiert eine Ebene im Raum der Einheiten y. Das Produkt xy liegt auf derselben Nullteilergeraden wie x. Beispiel: Für $x = (4, 2, 5)$ und $y = (1, 2, 5)$ ($\det M_y = -15$) ergibt $xy = (20, 10, 25)$. Da das Produkt $xy = 5(4, 2, 5)$ ist, liegt es auf derselben Nullteilergeraden wie x und somit auf dem Doppelkegel.
  - Liegt x auf der Ebene $a = 0$ und innerhalb des Doppelkegels ($b(b - 2c) < 0$), lautet die Bedingung $(b - c)e - bf = \pm\sqrt{-b(b - 2c)}\, d$. Diese definiert zwei sich kreuzende Ebenen durch den Ursprung. Das Produkt xy liegt auf dem Doppelkegel. Beispiel: Für $x = (0, 1, 5)$ und $y = (1, 1, -1)$ ($\det M_y = 4$) ergibt $xy = (3, 1, 5)$. Da die Determinante $\det M_{xy} = 0$ ist und der Realteil ungleich Null, liegt das Produkt xy auf dem Doppelkegel.

Die folgende Abbildung zeigt die Ausnahmemenge für den Nullteiler $x = (0, 1, 5)$. Dieser sowie seine Nullteilergerade λx liegen im Inneren des Doppelkegels und sind in rot dargestellt. Die gelbe Ebene ist die Menge der Einheiten y, die mit x (bzw. mit λx) multipliziert wieder auf der Nullteilergeraden λx und somit auf der Ebene $a = 0$ abgebildet werden. Sie entspricht dem Spaltenraum der Matrix der Elemente der blau dargestellten Nullteilerpartnergerade von x ($\lambda(0, 1, -4)$).

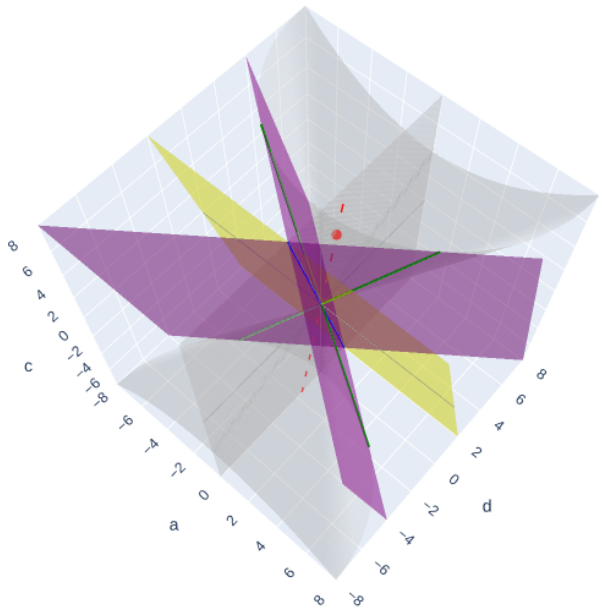

Abbildung 11: Ausnahmemenge für $x = (0, 1, 5)$

Das violette Ebenenpaar ist die Menge der Einheiten y, die mit x (bzw. mit λx) multipliziert auf dem Doppelkegel landen. Es entspricht den Spaltenräumen der Matrizen der grün dargestellten Nullteilergeraden $\lambda(3, 1, 5)$ und $\lambda(-3, 1, 5)$ des Doppelkegels, auf die der Nullteiler $x = (0, 1, 5)$ durch Multiplikation abgebildet werden kann. Der in Abbildung 10 dargestellte Spaltenraum von M_x schneidet den Doppelkegel genau in diesen beiden Nullteilergeraden.
Die blau dargestellte Nullteilerpartnergerade $\lambda(0, 1, -4)$ ist die gemeinsame Schnittgerade der drei Ausnahmeebenen, die die multiplikative Rückführung auf Nullteiler beschreiben.
Die Nullteiler der Ebene stehen mit den Nullteilern des Doppelkegels somit in einer festen, durch die Spaltenräume vermittelten Beziehung.

7.5.3 Nullteiler ÷ Einheit

Seien $z = (4, 2, 5)$ ein Nullteiler (vgl. Abschnitt 7.2) und $x = (1, 2, 2)$ invertierbar ($\det M_x = a^2 + b^2 - 2bc = 1 + 4 - 8 = -3 \neq 0$). Der Quotient z/x ergibt

$$(4, 2, 5)/(1, 2, 2) = (2, \ -2, \ 1).$$

Da für $y = (2, -2, 1)$ die Determinante $\det M_y = d(d^2 + e^2 - 2ef) = 2(4 + 4 + 4) = 24 \neq 0$ ist, ist y kein Nullteiler, sondern invertierbar.

Umgekehrt lässt sich jeder Nullteiler z generisch als Produkt zweier Einheiten xy darstellen. Beispiel: $(1, 2, 2) \cdot (2, -2, 1) = (4, 2, 5)$.

Ausnahmen

Die generische Invertierbarkeit gilt für den Quotienten Nullteiler ÷ Einheit in $\mathbb{Y}(1)$ nicht in den folgenden Ausnahmekonstellationen:

- **Reelle Skalierung:** Die Einheit $x = (a, b, c)$ ist eine reelle Zahl ($b = c = 0$). Dann verbleibt der Quotient z/x wegen der Homogenität der Determinante auf derselben Nullteilergeraden durch den Ursprung, wie der Ausgangsnullteiler z.
- **Verschwindender Realteil:** Für einen Nullteiler $z = (p, q, r)$ und eine Einheit $x = (a, b, c)$ wird der Realteil des Quotienten z/x Null, d.h. $pa+q(b-c)-rb = 0$. Die Gleichung definiert eine Ebene im Raum der Einheiten x. Sie ist formal identisch mit Gleichung 10 in Abschnitt 7.2. Beispiel: Für $z = (4, 2, 5)$ und $x = (1, 0, 2)$ ($\det M_x = 1$) ergibt $z/x = (0, 2, 5)$ (liegt auf der Ebene $a = 0$ und ist somit ein Nullteiler).
- **Abbildung auf den Kegel:** Die Bedingung für das Abbilden des Quotienten z/x eines Nullteilers $z = (p, q, r)$ und einer Einheit $x = (a, b, c)$ auf den Doppelkegel, hängt von der Lage des Nullteilers z ab:
  - Liegt z selbst auf dem Kegel ($a^2 + b^2 - 2bc = 0$), lautet die Bedingung $rb - qc = 0$ (vgl. mit Abb. auf den Kegel in 7.5.2). Diese definiert eine Ebene im Raum der

Einheiten y. Der Quotient z/x liegt auf derselben Nullteilergeraden wie z. Beispiel: Für $z = (4, 2, 5)$ und $x = (1, 2, 5)$ ($\det M_x = -15$) ergibt $z/x = (\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 1)$. Da der Quotient $z/x = \frac{1}{5}(4, 2, 5)$ ist, liegt er auf derselben Nullteilergeraden wie z und somit auf dem Doppelkegel.

– Liegt z auf der Ebene $a = 0$ und außerhalb des Doppelkegels ($q(q - 2r) > 0$), lautet die Bedingung $br - cq = \pm a\sqrt{q(q - 2r)}$. Diese definiert zwei sich kreuzende Ebenen durch den Ursprung. Der Quotient z/x liegt auf dem Doppelkegel. Beispiel: Für $z = (0, 2, -3)$ und $x = (1, 0, 2)$ ($\det M_x = 1$) ergibt $z/x = (-4, 2, 5)$. Da die Determinante $\det M_{z/x} = 0$ ist und der Realteil ungleich Null, liegt der Quotient z/x auf dem Doppelkegel.

Die folgende Abbildung zeigt die Ausnahmemenge für den Nullteiler $z = (0, 2, -3)$. Dieser sowie seine Nullteilergerade λz liegen außerhalb des Doppelkegels und sind in rot dargestellt. Die gelbe Ebene ist die Menge der regulären Divisoren x, durch die der Quotient z/x (bzw. $\lambda z/x$) wieder auf der Nullteilergerade λz und somit auf der Ebene $a = 0$ abgebildet wird. Sie entspricht dem Spaltenraum der Matrix der blau dargestellten Nullteilerpartnergerade von z ($\lambda(0, 2, 5)$).

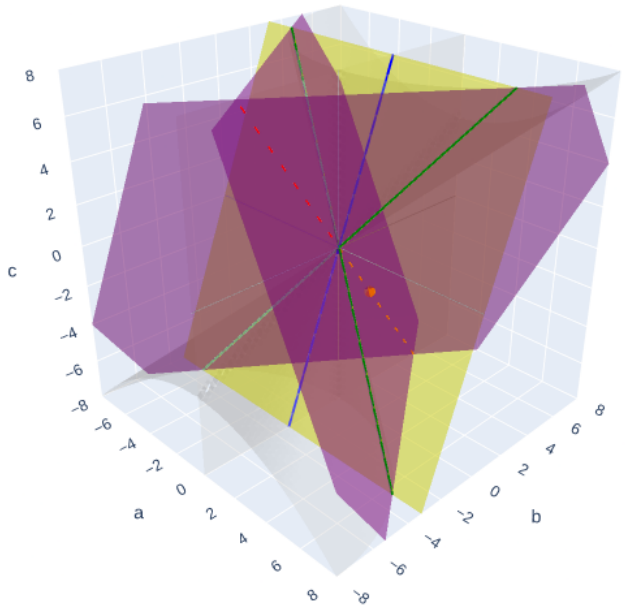

Abbildung 12: Ausnahmemengen für $z = (0, 2, -3)$

Das violette Ebenenpaar ist die Menge der regulären Divisoren x, durch die der Quotient z/x (bzw. $\lambda z/x$) auf dem Doppelkegel landet. Es entspricht den Spaltenräumen der Matrizen der grün dargestellten Nullteilergeraden $\lambda(4, 2, 5)$ und $\lambda(-4, 2, 5)$ des Doppelkegels, auf die der Nullteiler $z = (0, 2, -3)$ durch Division abgebildet werden kann. Diese sind zugleich die Schnittgeraden der gelben Ebene durch den Doppelkegel und das violette Ebenenpaar. Das Ebenenpaar schneidet die Ebene $a = 0$ in der Nullteilergerade λz, genau wie in Abbildung 9 dargestellt.
Auch bei der Division zeigt sich, dass die Nullteiler der Ebene mit den Nullteilern des Doppelkegels in einer festen, durch die Spaltenräume vermittelten Beziehung stehen.

Liegt ein invertierbarer Nullteiler innerhalb des Doppelkegels, kann er durch Multiplikation auf den Kegel abgebildet werden. Liegt er jedoch außerhalb des Kegels, kann er nur durch Division auf den Kegel abgebildet werden.

8 Fazit und Ausblick

Die in dieser Arbeit eingeführten Trinionen-Algebren $\mathbb{Y}(k)$ stellen aus Sicht des Autors die einfachste denkbare dreidimensionale Erweiterung der komplexen und dualen Zahlen dar. Mit drei Basiselementen $\{1, i, j\}$ und nur drei Regeln $i^2 = -1, j^2 = 0, ij = ji = k$ wird aus einem minimalistischen Axiomensystem eine überraschend reiche Struktur entfaltet, die die Kommutativität erhält und sich trotz Nicht-Assoziativität und der Existenz von Nullteilern rigoros analysieren lässt. Anders als bei Hamiltons Quaternionen oder den Oktonionen [1, p. 6], bei denen alle nichtreellen Basiselemente gleichartig definiert sind, bringt jedes der drei Basiselemente in $\mathbb{Y}(k)$ einen eigenständigen Charakter ein.

Die Arbeit zeigt, dass die aufgrund der Dreidimensionalität und Nicht-Assoziativität auftretenden Phänomene, wie die Existenz von invertierbaren Nullteilern, die multiplikative Nichtabgeschlossenheit der Nullteiler-Menge oder die vielfältige Geometrie derselben, keine pathologischen Entartungen, sondern Ausdruck des strukturellen Reichtums der Algebra sind. Nullteiler sind dabei die essenziellen strukturbildenden Elemente, die u.a. lokale voneinander getrennte Bereiche ermöglichen.

Die Nicht-Assoziativität von $\mathbb{Y}(k)$ verleiht der Algebra eine erhöhte strukturelle Komplexität. Durch sie hängt das Ergebnis einer Abfolge von Operationen nicht nur von den beteiligten Elementen, sondern entscheidend von ihrer Klammerung (Reihenfolge) ab. In Verbindung mit den prozesshaften Eigenschaften des nilpotenten Basiselements j eröffnet dies die Vorstellung einer emergenten algebraischen Zeitstruktur, die ohne eine lineare Zeitachse auskommt.

Darüber hinaus weisen die Algebren $\mathbb{Y}(k)$ konzeptionelle Parallelen zu grundlegenden Prinzipien der Physik und Systemtheorie auf: Die nilpotente Komponente kann als Modell für Prozesshaftigkeit und Irreversibilität dienen, die komplexe Komponente für Rotationen, während die Dreidimensionalität den Raum natürlich abbildet. Die Existenz von Nullteilern bietet ein algebraisches Analogon zu Strukturen und Annihilation.

Zudem weist die additive Zerlegung eines Trinions heuristische Resonanzen zu fundamentalen physikalischen Größen auf: Der reelle Anteil a lässt sich mit einer trägen Masse, der i-Anteil mit einem Drehimpuls (Spin) und der j-Anteil mit einem linearen Impuls assoziieren. Diese vielfältigen Analogien legen nahe, dass $\mathbb{Y}(k)$ nicht nur von rein mathematischem Interesse ist, sondern vielversprechende interpretative Schnittstellen zu theoretischer Physik, Systemtheorie und Naturphilosophie eröffnen könnte.

Die vorliegende Arbeit versteht sich als explorative Grundlagenuntersuchung ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Sie soll zu weiterführenden Studien anregen, denn nach der naiven Vorstellung des Autors ist das Universum selbst eine dreidimensionale Algebra.

Transparenzhinweis

Diese Arbeit wurde mit Assistenz von DeepSeek AI und Qwen3.6-Plus erstellt. Die KI's unterstützten insbesondere bei Erstellung der Python-Codes für Rechenprogramme und Visualisierungen sowie bei der LaTeX -Umsetzung. Die mathematischen Ideen, Resultate und Schlussfolgerungen stammen vollständig vom Autor.

Für die Rechenprogramme wurde die Python-Bibliothek SymPy verwendet. Für die Visualisierung der Nullteiler-Mengen kamen Matplotlib (für die 2D-Schnitte) und Plotly (für die 3D-Isosurfaces) zum Einsatz.

Literatur

[1] John C. Baez (2002), *The Octonions*, arXiv:math/0105155v4 [math.RA]. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0105155

[2] W. Clifford (1871), Preliminary Sketch of Biquaternions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-4, pp. 381-395. https://doi.org/10.1112/plms/s1-4.1.381

[3] G. Cramer (1750), *Introduction à l'Analyse des lignes Courbes algébriques*, Genève: Frères Cramer & Cl. Philbert, pp. 656–659.

[4] *Encyclopedia of Mathematics*. Adjugate matrix. EMS Press, Berlin, Stand: 2021. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Adjugate_matrix&oldid=51570 (Abgerufen am 13.06.2026).

[5] *Encyclopedia of Mathematics*. Algebraic system. EMS Press, Berlin, Stand: 2020. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Algebraic_system&oldid=44373 (Abgerufen am 13.06.2026).

[6] *Encyclopedia of Mathematics*. Cofactor. EMS Press, Berlin, Stand: 2021. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Cofactor&oldid=51571 (Abgerufen am 13.06.2026).

[7] *Encyclopedia of Mathematics*. Complex number. EMS Press, Berlin, Stand: 2023. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Complex_number&oldid=53376 (Abgerufen am 13.06.2026).

[8] *Encyclopedia of Mathematics*. Determinant. EMS Press, Berlin, Stand: 2016. https://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Determinant&oldid=39861 (Abgerufen am 13.06.2026).

[9] Y.-L.Gu, J. Luh (1987), Dual-number transformation and its applications to robotics, *IEEE Journal on Robotics and Automation*, vol. 3, no. 6, pp. 615-623. DOI: https://doi.org/10.1109/JRA.1987.1087138.

[10] M. Kervaire (1958), Non-parallelizability of the n sphere for n $>$ 7, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, vol. 44, pp. 280-283.

[11] J. Milnor (1958), Some consequences of a theorem of Bott, *Annals of Mathematics*, vol. 68, pp. 444-449.

[12] I. Shafarevich, A. Remizov (2012), *Linear Algebra and Geometry*, Springer Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-30994-6

[13] B. L. van der Waerden (1976), Hamilton's discovery of quaternions, *Mathematics Magazine*, vol. 49, no. 5, pp. 227-234. https://doi.org/10.1080/0025570X.1976.11976586

Korrespondenz:
Jörg Mösch
c/o Block Services, Stuttgarter Straße 106, D-70736 Fellbach
mailtojoerg@proton.me